2021年沈阳市高中三年教学质量监测(三)

数　学

命题：沈阳市第五中学　伊全才
东北育才双语　王海涛
沈阳市回民中学　程绍臣
审题：沈阳市教育研究院　王恩宾

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡指定区域。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试题卷上无效。

3.考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{x,x^2\}$，若 $A\cap B=B$,则实数 $x=$(　　)

A. -1　　B. 1　　C. ±1　　D. 0或 ±1

2.盒子中有4个球，其中3个白球，1个红球，现在从盒中随机无放回地取球，每次取出一个，直到取出红球为止. 则取出3个球停止的概率为(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{8}$

3.2021年2月13日，中国诗词大会第六季比赛如约而至。在某场比赛中,有甲、乙、丙、丁、戊五位选手，有机会争夺该场擂主。观看比赛的三名诗词爱好者，对本场比赛的擂主进行了如下猜测。小张：冠军是甲或丙；小陈：冠军一定不是乙和丙；小亮：冠军是丁或戊。比赛结束后发现：三人中只有一个人的猜测是对的，那么擂主是(　　)

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

4.已知圆锥曲线 $C:\frac{x^2}{t+1}+\frac{y^2}{t}=1,(t\in\mathbf{R},t\neq0,t\neq-1)$ 上满足 $|OM|=1$ 的点 M 共有4个，则此圆锥曲线 C 的离心率在下面的四个选项中不可能取的值为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.在三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，$P$ 为线段 DE 上的动点，若 $\overrightarrow{AP}=l\,\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$，$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，则 $l+m=$(　　)

$A.1$　　　　$B.\frac{2}{3}$　　　　$C.\frac{3}{2}$　　　　$D.2$

6.虚数单位 i 的平方根是(　　)

$A.-1$　　　　$B.-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　　　$C.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　　　$D.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

7.一条倾斜角为 $60°$ 的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于不同的 A,B 两点，设弦 AB 的中点为 C.过 C 作平行于 x 轴的直线交抛物线于点 D,则以 D 为切点的抛物线的切线的斜率为(　　)

$A.\frac{1}{3}$　　　　$B.2\sqrt{3}$　　　　$C.\sqrt{3}$　　　　$D.\frac{\sqrt{3}}{3}$

8.已知 $x?\ (1,2)$，$a\ \ 2^{x^2}$，$b=\left(2^x\right)^2$，$c=2^{2^x}$，则 a,b,c 的大小关系为(　　)

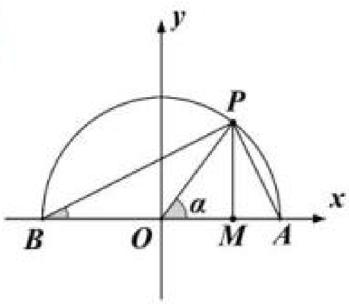
$A.a>b>c$　　　　$B.b>c>a$　　　　$C.b>a>c$　　　　$D.c>a>b$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9.已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}3x-x^2,0<x?\ 2\\ \dfrac{m(x-2)}{x},x>2\end{cases}$，$m\in\mathbf{R}$，那么函数 $g(x)=f(x)-2$ 在定义域内的零点个数可能是(　　)

$A.2$　　　　$B.4$　　　　$C.6$　　　　$D.8$

10.如图，圆心在坐标原点 O、半径为1的半圆上有一动点 P，A,B 是半圆与 x 轴的两个交点，过 P 作直线 l 垂直于直线 AB，M 为垂足.设 $?\ AOP\ \ a$，则下列结论正确的有(　　)



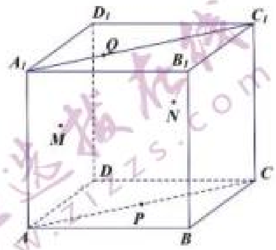
$A.$若 a Î $(0,\frac{p}{2})$，则 $\sin a+\cos a>1$

$B.$若 a Î $[0,\frac{p}{2})$，则 $a>\sin a$

$C.$若 a Î $(0,p)$，则 $|\overrightarrow{BM}|+|\overrightarrow{AM}|\ ?\ 2|\overrightarrow{PM}|$

$D.$若 $\alpha\in[0,\pi]$，则 $|PA|+|PB|$ 的最大值为2

11.如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，点 M,N,P 分别是平面 ADD_1A_1、平面 CDD_1C_1、平面 $ABCD$ 的中心，点 Q 是线段 A_1C_1 上的动点，则下列结论正确的是(　　)



A. PN 与 A_1C_1 所成角为 $\frac{\pi}{3}$

B. D 点到平面 MNP 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

C.三棱锥 $M-NPQ$ 的体积为定值 $\frac{1}{24}a^3$

D.直线 DQ 与平面 A_1ACC_1 所成角的正切值的最大值为 $\frac{1}{2}$

12.已知无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\in\mathbf{N}^*$，S_n 为其前 n 项和，且 5,23,29 是数列 $\{a_n\}$ 中的三项，则下列关于数列 $\{a_n\}$ 的选项中，正确的有(　　)

A. $d_{\max}=6$　　　　B. $S_3\le 2a_4$

C.数列 $\{\sin a_n\}$ 为单调递增数列　　　　D.143 一定是数列 $\{a_n\}$ 中的项

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.在四面体 $ABCD$ 中，△BCD 是边长为 2 的等边三角形，△ABD 是以 BD 为斜边的等腰直角三角形，平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为________.

14.安排高二年级一、二两个班一天的数、语、外、物、体，一班的化学及二班的政治各六节课。要求体育课两个班一起上，但不能排在第一节；由于选课之故，一班的化学和二班的政治要安排在同一节　其他语、数、外、物四科由同一任课教师分班上课，则不同的排课表方法共有________种.

15.在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a^2+b^2=2c^2$，则角 C 的最大值为________.

16.设某组数据均落在区间 $[10,60]$ 内，共分为 $[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$　$[40,50)$，$[50,60]$ 五组，对应频率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5.已知依据该组数据所绘制的频率分布直方图为轴对称图形，给出下列四个条件：

① $p_1=0.1$，$p_3=0.4$；　　② $p_2=2p_5$；

③ $p_1+p_4=p_2+p_5=0.3$；　　④ $p_1\le 2p_2\le 4p_3\le 2p_4\le p_5$.

其中能确定该组数据频率分布的条件有______________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足，$a_1=2,b_1=1,\ a_2=b_3,\ a_3=b_4-2$.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{a_n\}$中去掉数列$\{b_n\}$的项后，余下的项按原来的顺序组成数列$\{c_n\}$，求$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}$的值.

18.(12 分)在△ABC中，设$\boldsymbol{m}=(\cos B,-\sin B)$，$\boldsymbol{n}=(\cos C,\sin C)$，已知$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}$.

(1)求角A；

(2)设BC的中点为D，若______，求$\cos C$.

从以下两组条件中任选其一，补充在上面的问题中并作答.

①$\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\sin\angle CAD$；②$B<C$，$AD=\frac{\sqrt{21}}{14}BC$.

注：如果选择两组条件分别解答，按第一个解答计分.

19.(12 分)2021 年某省开始的“3+1+2”模式新高考方案中，对化学、生物、地理和政治等四门选考科目，制定了计算转换分T(即记入高考总分的分数)的“等级转换赋分规则”(详见附 1 和附 2)，具体的转换步骤为：①原始分Y等级转换；②原始分等级内等比例转换赋分。

某校的一次年级模拟考试中，政治、化学两选考科目的原始分分布如下表：

等级	A	B	C	D	E
比例	约 15%	约 35%	约 35%	约 13%	约 2%
政治学科各等级对应的原始分区间	$[81,98]$	$[72,80]$	$[66,71]$	$[63,65]$	$[60,62]$
化学学科各等级对应的原始分区间	$[90,100]$	$[80,89]$	$[69,79]$	$[66,68]$	$[63,65]$

现从政治、化学两学科中分别随机抽取了 20 个原始分成绩数据如下：

政治		化学
个位数	十位数	个位数
98766540	6	479
98654210	7	012345799
862	8	13469
4	9	358

(1)该校的甲同学选考政治学科，其原始分为 86 分，乙同学选考化学学科，其原始分为 93 分.基于高考实测的转换赋分模拟，试分别计算甲乙同学的转换分，并从公平性的角度谈谈你对新高考这种“等级转换赋分法”的看法.

(2)若从该校化学学科等级为 A、B 的学生中，随机抽取 3 人，设这 3 人转换分不低于 90 分的有 ξ 人，求 ξ 的分布列和数学期望。.

附 1：等级转换的等级人数占比与各等级的转换分赋分区间.

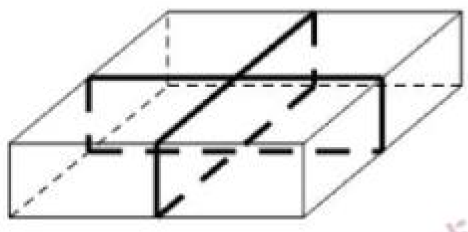
等级	A	B	C	D	E
原始分从高到低排序的等级人数占比	约 15%	约 35%	约 35%	约 13%	约 2%
转换分 T 的赋分区间	$[86,100]$	$[71,85]$	$[56,70]$	$[41,55]$	$[30,40]$

附 2：计算转换分 T 的等比例转换赋分公式：$\dfrac{Y_2-Y}{Y-Y_1}=\dfrac{T_2-T}{T-T_1}$ (其中：Y_1，Y_2，分别表示原始分 Y 对应等级的原始分区间下限和上限；T_1，T_2 分别表示原始分对应等级的转换分赋分区间下限和上限.T 的计算结果按四舍五入取整)

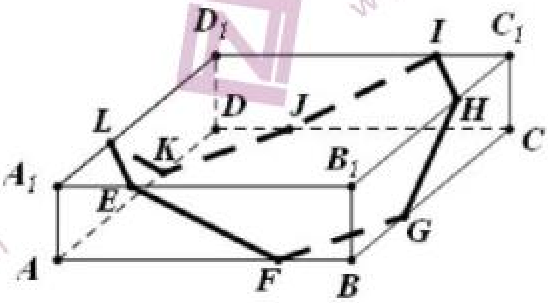
20.(12 分)将长(AB)、宽(BC)、高(AA_1)分别为 4，3，1 的长方体点心盒用彩绳做一个捆扎，有如下两种方案：

方案一：如图(1)传统的十字捆扎；

方案二：如图(2)折线法捆扎，其中 $A_1E=FB=BG=HC_1=C_1I=JD=DK=LA_1=1$.



(1)



(2)

（1）哪种方案更省彩绳？说明理由；

（2）求平面 EFK 与平面 GIJ 所成角的余弦值.

21.(12 分)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点和上顶点分别为点 $F(c,0)(b>c>0)$和点 A，直线 $6x-5y-14=0$ 交椭圆于 B,C 两点，且 F 恰好为△ ABC 的重心.

(1)求椭圆离心率；

(2)抛物线 $y^2=2px$ 的焦点是 F，P 为抛物线准线上任一点，过点 P 作抛物线的切线 PD,PE，切点分别为 D,E，直线 $x=0$ 与直线 PD,PE 分别交于 M,N 两点，点 M,N 的纵坐标分别为 m、n，求 mn 的值.

22.(12 分)已知函数 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-ax}$，其中 $a\neq 0$.

(1)若 $f(x)$ 的极值为1，求实数 a 的值；

(2)若对任意 $x\geqslant 0$，有 $f(x)\leqslant \frac{1}{2}x+1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2021年沈阳市高中三年教学质量监测(三)

数学参考答案

一、单项选择题

1∽8题 ABCDB　DCB

二、多项选择题

9.【解析】BD

函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\because f(0)=0$，$\therefore x=0$ 是函数 $f(x)$ 的零点，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}4x-x^2, 0<x\le 4\\ \dfrac{m(x-4)}{x}, x>4\end{cases}$，

当 $0<x\le 4$ 时，$4x-x^2=2$ 可得 $x=2+\sqrt{2}$ 或 $x=2-\sqrt{2}$，

当 $x>4$ 时，令 $\dfrac{m(x-4)}{x}=2$，即 $(m-2)x=4m$，

若 $m=2$ 时，显然无解，

若 $m\ne 2$ 时，$x=\dfrac{4m}{m-2}>4$，即 $m>2$ 时，$g(x)=f(x)-2$ 在 $(4,+\infty)$ 上有一个零点，

当 $m\le 2$ 时，$g(x)=f(x)-2$ 在 $(4,+\infty)$ 上没有零点，

综上，由函数 $f(x)$ 是奇函数知，$m\le 2$ 时，函数 $g(x)=f(x)-2$ 有5个零点，

当 $m>2$ 时，函数 $g(x)=f(x)-2$ 有7个零点.

10.AC　11.ABC　12.AD

三、填空题

13.【解析】因为 ΔABD 是以 BD 为斜边的等腰直角三角形，所以 $DA\perp AB$，

又因为平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$，

所以 $DA\perp$ 平面 ABC，所以 $DA\perp AC$，可得 DA，AB，AC 两两垂直，

且 $DA=BA=CA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\sqrt{2}$，构造正方体

可得四面体 $ABCD$ 的外接球半径 $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以表面积为$4\pi R^2=6\pi$.

14.【解析】5400种.5 5 A_4^4 9 5400

15.【解析】$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geq\dfrac{2c^2-c^2}{a^2+b^2}=\dfrac{c^2}{2c^2}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当$a=b=c$时等号成立.

所以角C的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$.

16.【解析】答案：①④

四、解答题

17.【解析】

(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，

由$\begin{cases}q^2=2+d\\q^3-2=2+2d\end{cases}$，得$\begin{cases}d=2\\q=2\end{cases}$ 【2分】

$\therefore a_n=2n,b_n=2^{n-1}$ 【5分】

(2)由$a_n=2n,b_n=2^{n-1}$得$b_1=1$，$b_2=2=a_1$，$b_3=4=a_2$，$b_4=8=a_4$，$b_5=16=a_8$，

$b_6=32=a_{16}$，$b_7=64=a_{32}$，$b_8=128=a_{64}$，$b_9=256=a_{128}$ 【8分】

$\therefore c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{107})-(b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8)$

$=\dfrac{107\times(2+214)}{2}-254=11302$ 【10分】

18.【解析】(1)$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\cos B\cos C-\sin B\sin C=\cos(B+C)=\dfrac{1}{2}$ 【2分】

即$\cos(\pi-A)=\dfrac{1}{2}$，进而$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，由于$A\in(0,\pi)$，则$A=\dfrac{2\pi}{3}$ 【4分】

(2)选①，设角A，B，C所对的边分别为a，b，c

在△BAD中，由正弦定理，$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$ 【5分】

在△CAD中，由正弦定理，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$ 【6分】

而$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，则$\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，

又有$BD=CD$，$\sin\angle BAD=\dfrac{1}{2}\sin\angle CAD$，则$AB=2AC$，即$c=2b$ 【8分】

(**注**：利用△BAD与△CAD的面积相等得此结论，亦得4分)

由余弦定理，$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos A}=\sqrt{4b^2+b^2-4b^2\cdot(-\frac{1}{2})}=\sqrt{7}b$ 【10 分】

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7b^2+b^2-4b^2}{2\sqrt{7}b^2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 【12 分】

选②，设角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c

$AD^2=\frac{1}{4}|\overline{AB}+\overline{AC}|^2=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cos A)=\frac{b^2+c^2-bc}{4}$ 【6 分】

由于 $AD=\frac{\sqrt{21}}{14}BC$，则 $BC^2=\frac{28}{3}AD^2$，即 $a^2=\frac{7}{3}(b^2+c^2-bc)$ 【8 分】

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc$ 【9 分】

因此 $\frac{7}{3}(b^2+c^2-bc)=b^2+c^2+bc$，整理得 $2b^2-5bc+2c^2=0$，$(b-2c)(2b-c)=0$

则 $b=2c$ 或 $b=\frac{1}{2}c$，由于 $B<C$，则 $b=\frac{1}{2}c$，因此 $a^2=b^2+c^2+bc=\frac{7}{4}c^2$，$a=\frac{\sqrt{7}}{2}c$ 【10 分】

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{7}{4}c^2+\frac{1}{4}c^2-c^2}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}c\cdot\frac{1}{2}c}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 【12 分】

19. 【解析】

(1)甲同学选考政治学科原始分为 86 分，

根据等比例转换赋分公式：$\frac{98-86}{86-81}=\frac{100-T}{T-86}$ 得 $T=90$.

乙同学选考化学学科原始分为 93 分，根据等比例转换赋分公式：$\frac{100-93}{93-90}=\frac{100-T}{T-86}$ 得 $T=90$，

故甲乙两位同学的转换分都为 90 分. 【2 分】

从公平性的角度谈谈你对新高考这种"等级转换赋分法"的看法：

①从已知可得甲乙同学原始分都排第三，转换后都是 90 分，因此高考这种"等级转换赋分法"具有公平性与合理性.

②甲同学与乙同学原始分差 7 分，但转换后都是 90 分，高考这种"等级转换赋分法"对尖子生不利.

【4 分】

(2)该校化学学科原始分为 93 分时，根据等比例转换赋分公式：$\frac{100-93}{93-90}=\frac{100-T}{T-86}$，

得 $T=90$，即原始分低于 93 分的转换分低于 90 分， 【6 分】

所以转换分不低于 90 分的有 3 人，低于 90 分的有 5 人，ξ 的所有取值有 0,1,2,3，

$$P(\xi=0)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28},\quad P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56},\quad P(\xi=3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56},$$ 【8 分】

ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

【10 分】

$$E(\xi)=0\times\frac{2}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{9}{8}.$$ 【12 分】

20.【解析】

（1）方案②更省彩绳.

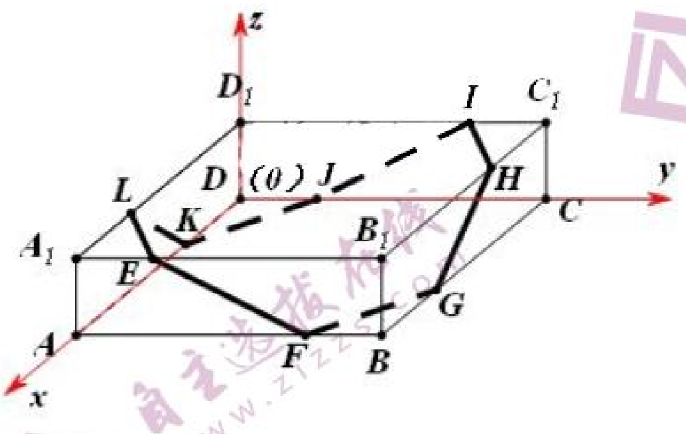
原因如下：

方案①中彩绳总长度为 $l=2\times(4+3)+4=18$. 【2 分】

方案②中彩绳总长度为 $m=2\times\sqrt{5}+6\times\sqrt{2}<2\times2.5+6\times1.5=14$. 【3 分】

即 $l>m$，所以方案②更省彩绳.【注：只要求出两种方案的长度进行比较即可】

(2)法一：以点 D 为原点，DA,DC,DD_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图：



则点 $E(3,1,1),F(3,3,0),K(1,0,0),G(2,4,0),I(0,3,1),J(0,1,0)$，

$\overrightarrow{KE}=(2,1,1),\overrightarrow{KF}=(2,3,0),\overrightarrow{JG}=(2,3,0),\overrightarrow{JI}=(0,2,1)$. 【5 分】

设平面 EFK 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 GIJ 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{KE}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{KF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1+y_1+z_1=0\\ 2x_1+3y_1=0\end{cases}\Rightarrow z_1=2y_1$.不妨取 $\overrightarrow{n_1}=\left(-\frac{3}{2},1,2\right)$； 【7 分】

同理取 $\overrightarrow{n_2}=\left(-\frac{3}{2},1,-2\right)$. 【9 分】

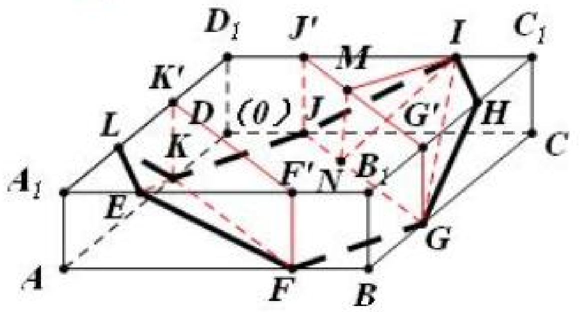
$$\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\frac{9}{4}+1-4}{\sqrt{\frac{9}{4}+1+4}\sqrt{\frac{9}{4}+1+4}}=-\frac{3}{29}.$$ 【11 分】

所以两个平面所成二面角的余弦值为 $-\frac{3}{29}$. 【12 分】

法二：如图，作 $GG'\,//\,BB_1$，$JJ'\,//\,BB_1$，连结 $G'J'$，由点 I 向 $G'J'$ 作垂线，垂足为 M，

再由 M 作 $MN\perp GJ$ 于 N. 【5 分】

记 $\theta=\angle INM$，可求得 $IM=\frac{4}{\sqrt{13}}$，则 $\tan\theta=\frac{\sqrt{13}}{4}$，$\tan 2\theta=\frac{8\sqrt{13}}{3}$. 【9 分】



由于对称性，所求两个平面所成的角等于 2θ，故其余弦值的绝对值为 $\cos 2\theta=\frac{3}{29}$. 【12 分】

21. 【解析】

解：(1)由题设 $F(c,0),A(0,b),B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，线段 BC 的中点为 $G(x_0,y_0)$，

由三角形重心的性质知 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FG}$，即 $(c,-b)=2(x_0-c,y_0)$，解得 $x_0=\frac{3c}{2},y_0=-\frac{b}{2}$，

即 $G\left(\frac{3c}{2},-\frac{b}{2}\right)$ 代入直线 $6x-5y-14=0$，得 $9c+\frac{5}{2}b-14=0$ ①. 【2 分】

又 G 为线段 BC 的中点，则 $x_1+x_2=3c, y_1+y_2=-b$，

又 B，C 为椭圆上两点，$\therefore \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$，

以上两式相减得 $\therefore \dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=1$，

所以 $\therefore k_{BC}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}\times\dfrac{3c}{-b}=\dfrac{6}{5}$，化简得 $2a^2=5bc$ ②【4 分】

由①②及 $a^2=b^2+c^2$，解得：$\begin{cases}a=\sqrt{5}\\ b=2\\ c=1\end{cases}$，$\therefore e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$． 【6 分】

(2)抛物线 $y^2=2px$ 的焦点是 $F(1,0)$，$\therefore \dfrac{p}{2}=1$，$\therefore p=2$，

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=4x$． 【7 分】

设点 P 的坐标为 $(-1,y_0)$，直线 PD 的方程为 $y=k_1(x+1)+y_0$，直线 PE 的方程为 $y=k_2(x+1)+y_0$．

由 $\begin{cases}y^2=4x\\ y=k_1(x+1)+y_0\end{cases}$，得 $k_1y^2-4y+4k_1+4y_0=0$．

所以 $\Delta=16-4k_1(4k_1+4y_0)=0$，得 $k_1^{\ 2}+y_0k_1-1=0$．

同理，得 $k_2^{\ 2}+y_0k_2-1=0$， 【9 分】

所以 $\begin{cases}k_1+k_2=-y_0\\ k_1k_2=-1\end{cases}$， 【10 分】

分别令 $x=0$，得 $m=k_1+y_0$，$n=k_2+y_0$，

所以 $mn=(k_1+y_0)(k_2+y_0)=y_0^2+(k_1+k_2)y_0+k_1k_2=-1$． 【12 分】

22. 【解析】(1) $f'(x)=-e^{-ax}[ax-(1-a)]$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{a}-1$． 【1 分】

① 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,\dfrac{1}{a}-1)$，

$f(x)$ 的极小值为 $f(\dfrac{1}{a}-1)=\dfrac{e^{a-1}}{a}<0$，因此极值不为 1，不符题意 【2 分】

② 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\dfrac{1}{a}-1)$，单调递减区间为 $(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$

$f(x)$ 的极大值为 $f(\frac{1}{a}-1)=\frac{e^{a-1}}{a}$.　　【3 分】

令 $\frac{e^{a-1}}{a}=1$，则 a 是方程 $e^{a-1}-a=0$ 的根.由 $g(a)=e^{a-1}-a,a>0$， $g'(a)=e^{a-1}-1$，

令 $g'(a)=0$，则 $a=1$， $g(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， $\therefore g(a)_{\min}=g(1)=1$，

因此，方程 $e^{a-1}-a=0$ 仅有一根.当且仅当 $a=1$ 时， $f(x)$ 的极值为1.

综上， $a=1$　　【5 分】

(2)原命题即：对任意 $x\geqslant 0$，有 $(x+1)e^{-ax}\leqslant\frac{1}{2}x+1$ 恒成立.

等价于：对任意 $x\geqslant 0$，有 $e^{-ax}\cdot\frac{x+1}{x+2}\leqslant\frac{1}{2}$ 恒成立，　　【6 分】

令 $h(x)=e^{-ax}\cdot\frac{x+1}{x+2}$，

$h'(x)=\frac{e^{-ax}}{(x+2)^2}\cdot[1-a(x+1)(x+2)]=e^{-ax}\cdot\frac{x+1}{x+2}\cdot[\frac{1}{(x+1)(x+2)}-a]$，　　【7 分】

① 当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，对任意 $x\geqslant 0$，有 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}-a\leqslant\frac{1}{2}-a\leqslant 0$，

则 $h'(x)\leqslant 0$， $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减， $h(x)\leqslant h(0)=\frac{1}{2}$，符合题意　　【8 分】

② 当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，对任意 $x\in(0,\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{a}}-\frac{3}{2})$，

有 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}-a>\frac{1}{(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{a}}-\frac{1}{2})(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{a}}+\frac{1}{2})}-a=0$.　　【9 分】

因此 $x\in(0,\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{a}}-\frac{3}{2})$ 时 $h'(x)>0$， $h(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{a}}-\frac{3}{2})$ 单调递增，

故当 $x\in(0,\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{a}}-\frac{3}{2})$ 时， $h(x)>h(0)=\frac{1}{2}$，不符题意.　　【10 分】

③ 当 $a<0$ 时，对任意 $x\geqslant 0$，有 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}-a>0$，则 $g'(x)>0$，

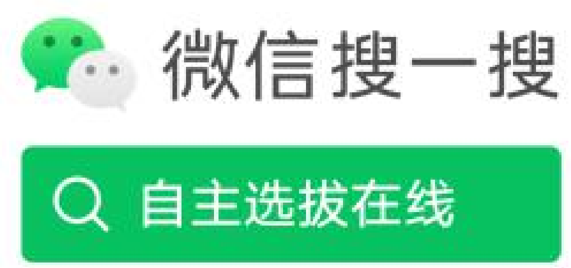
$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x>0$ 时， $h(x)>h(0)=\frac{1}{2}$，不符题意；

综上， a 的取值范围是 $[\frac{1}{2},+\infty)$.　　【12 分】

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》