

2021 年全国高考临门一卷(一)

数 学

注意事项:

1. 本卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\frac{1+ai}{2+i}$ ($a \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位) 为纯虚数,则 $a =$
A. 2 B. 1 C. -1 D. -2
2. 已知集合 $P = \{y | y = x^2 - 2x + 3\}$, $Q = \{x | 2^{3-x} \geq 1\}$,则“ $a \in P$ ”是“ $a \in Q$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知平面向量 a, b 满足 $b = (\sqrt{3}, 1)$, $|2a - b| = 1$,则 $|a|$ 的取值范围为
A. $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ B. $(1, 3)$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ D. $(2, 4)$
4. 对数的创始人约翰·奈皮尔(John Napier, 1550—1617)是苏格兰数学家。直到 18 世纪,瑞士数学家欧拉发现了指数与对数的互逆关系,人们才认识到指数与对数之间的天然关系。对数发现前夕,随着科技的发展,天文学家做了很多的观察,需要进行很多计算,而且要算几个大数的连乘,往往需要花费很长时间。基于这种需求,1594 年,奈皮尔运用了独创的方法构造出对数方法。现在随着科学技术的需要,一些幂的值用数位表示,譬如 $2^{10} = 1\,024 \in (10^3, 10^4)$,所以 2^{10} 的数位为 4(一个自然数数位的个数,叫做数位)。则 $2\,020^{2\,021}$ 的数位是(注 $\lg 2\,020 \approx 3.305$)
A. 6 679 B. 6 680 C. 6 681 D. 6 682
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$,则不等式 $f(3a - 1) \geq f^2(a^2)$ 的解集为
A. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$
C. $[\frac{1}{2}, 1]$ D. $[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$
6. 已知函数 $f(x) = \frac{a^x}{1+a^x} + b \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c$,其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{Z}$,则 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 的值一定不会是
A. $2 + \sqrt{3}$ 和 $-3 - \sqrt{3}$ B. -3 和 4 C. 3 和 -1 D. $\frac{3+\sqrt{2}}{4}$ 和 $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$

【2021 年全国高考临门一卷(一)·数学 第 1 页(共 4 页)】

7. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n , 且 $S_n + T_n = 1$, 则 $a_{10} =$

- A. $\frac{1}{90}$ B. $\frac{1}{110}$ C. $\frac{1}{132}$ D. $\frac{1}{156}$

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 MN 过 F_1 , 且与双曲线左支交于 M, N 两点, 若 $\angle NMF_2 = \angle MF_1F_2$, $NF_2 = 2MF_2$, 则该双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 4

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 一个不透明的口袋内装有 4 张大小、形状完全相同的卡片, 下列说法正确的是

A. 若其中红色卡片与蓝色卡片各两张, 从中一次性地任意取出 2 张卡片, 则事件“取出的 2 张卡片都是红色”与“取出的 2 张卡片都是蓝色”为对立事件

B. 若其中红色卡片与蓝色卡片各两张, 从中有放回地取 3 次, 每次取 1 张, 用 X 表示取得红色卡片的次数, 则 $P(X=2) = \frac{3}{8}$

C. 若卡片上分别写有数字 0, 2, 5, 5, 现甲从中取出一张卡片并记录卡片上的数字后便放回, 然后乙再从中取出一张卡片, 若乙取出的卡片上数字大于甲即可获胜, 则在乙获胜的条件下, 甲取出的卡片上数字为 2 的概率为 $\frac{1}{3}$

D. 若卡片上分别写有数字 0, 2, 5, 5, 从中无放回地取 3 次, 每次取 1 张, 用 $x_i (i=1, 2, 3)$ 表示每次取到的数字, 则“ $x_1 x_2 x_3$ ”恰为数字“520”的概率为 $\frac{1}{12}$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{2 + \cos 2x}$, 则下列关于 $f(x)$ 判断正确的是

A. $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数

B. $f(x)$ 的图象关于原点对称

C. $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right]$

D. 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y = \frac{\cos 2x}{4 + 2\sin 2x}$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度获得

11. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=1, AA_1=2, BC_1$ 与 B_1C 交于点 F , 点 E 是线段 A_1B_1 上的动点, 则下列结论正确的是

A. $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. 存在点 E , 使得 $AF \perp BE$

C. 三棱锥 $B-AEF$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

D. 直线 AF 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

12. 设有一组圆 $C_k: (x-k)^2 + (y-1)^2 = k^2, k \neq 0$, 下列四个命题正确的是

A. 存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得圆 C_k 与 y 轴相切

B. 存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得圆 C_k 与圆 C_{k+1} 有公共点

C. 存在一条直线与所有的圆均相交

D. 存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得圆 C_k 经过原点

【2021 年全国高考临门一卷(一)·数学 第 2 页(共 4 页)】

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 某企业一种商品的产量与单位成本数据如下表:

产量 x (万件)	2	3	4
单位成本 y (元/件)	3	a	7

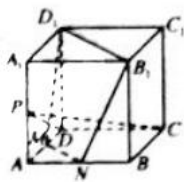
现根据表中所提供的数据,求得 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 2x - \frac{a}{5}$, 则预测当 $x = 5$ 时单位成本为每件 _____ 元.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 点 A 是椭圆的上顶点, 过点

F_1 作 $F_1D \perp AF_2$, 垂足为 D , 若 $|F_2D| = \frac{1}{2}|F_1F_2|$, 则椭圆 C 的离心率为 _____.

15. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, M, N 分别为棱 AD, AB 的中点, 点 P 在棱 AA_1 上, 且平面 $PCD \perp$ 平面 MNB_1D_1 , 则直线 MN 与平面 PCD 的位置关系是 _____; 三棱锥 $C-ADP$ 的外接球体积为 _____.

(本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)



16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 面积为 S , 则 $\frac{4S}{a^2 + 4b^2}$ 的最大值是 _____.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分10分)

在① $2a \cos C + c = 2b$; ② $\frac{4S}{\tan A} = c^2 \cos A + a c \cos C$ (S 为 $\triangle ABC$ 的面积); ③ $\sqrt{3} \left(b \sin C - \frac{c \cos B}{\tan C} \right) = a$

这三个条件中任选一个, 补充到下面的问题中, 并作答。

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , _____, AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线, 且 $AD = \sqrt{3}$, 求角 A 的大小及 $\triangle ABC$ 面积的最小值。

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分。

18. (本小题满分12分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = a_n^2 + a_n (n \in \mathbb{N}^+)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n \sqrt{a_{n+1}} + a_{n+1} \sqrt{a_n}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分12分)

2021年2月25日举行的全国脱贫攻坚总结表彰大会上, 国家电网共有23名(个)先进个人、先进集体获得表彰。其中, 国网西藏电力有限公司农电工作部从习近平总书记手中接过了“全国脱贫攻坚楷模”奖牌。过去8年, 在党中央坚强领导下, 经过世界规模最大、力度最强的脱贫攻坚战, 近1亿人摆脱绝对贫困。长期以来, 贫困地区的农产品面临“种得出、卖不出”“酒香也怕巷子深”的困境。深谙互联网思维的国家电网人, 搭平台、建渠道, 以一款APP让众多贫困地区的产品销售易如反掌。2020年“6.18”期间, 带货主播和直播运营两大岗位高达去年同期的11.6倍。针对这一市场现象, 为了加强监管, 相关部门推出了针对电商的商品和服务的评价体系。现从评价系统中选出100次成功交易, 并对其评价进行统计, 对商

【2021年全国高考临门一卷(一)·数学 第3页(共4页)】

品的好评率为 0.6,对商品和服务都做出好评的交易为 40 次,对商品和服务都不满意的交易为 5 次.

(1)请完成关于商品和服务评价的 2×2 列联表,并判断能否在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下,认为商品好评与服务好评有关?

	对服务好评	对服务不满意	合计
对商品好评	40		
对商品不满意		5	
合计			100

(2)从“对服务不满意”的评价中分层选出 10 个,再从这 10 个评价中随机选出 6 个,记其中“对商品不满意”的个数为 X ,求 X 的分布列及数学期望.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}, n=a+b+c+d.$$

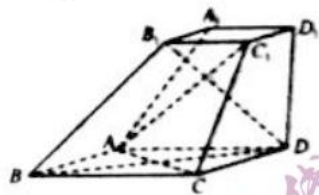
$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$.

$\angle B_1BD = \frac{\pi}{6}$, $BB_1 = AB = 2A_1B_1 = 2$.

- (1)求证:直线 $AC \perp$ 平面 BDB_1 ;
(2)求直线 A_1B_1 与平面 ACC_1 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ,过点 $P(2,0)$ 作直线 l 交抛物线于 A, B 两点.

- (1)若 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$,求 $\triangle FAB$ 的面积;
(2)过点 A, B 分别作抛物线 C 的两条切线 l_1, l_2 ,且直线 l_1 与直线 l_2 相交于点 M ,问:点 M 是否在某条定直线上? 若在,求该定直线的方程;若不在,请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1} + \frac{a}{x} + a + 1 (a \in \mathbb{R})$.

- (1)若 $a > 0$,证明:函数 $f(x)$ 在 $[\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减;
(2)是否存在实数 a ,使得函数 $f(x)$ 在 $(0, 8)$ 内存在两个极值点? 若存在,求实数 a 的取值范围;若不存在,请说明理由. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.693, e^4 \approx 4.5$)

2021 年全国高考临门一卷(一)·数学参考答案

1. D $\frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2+a+(2a-1)i}{5} = \frac{2+a}{5} + \frac{2a-1}{5}i$, 因为 $\frac{1+i}{2+i}$ 为纯虚数, 所以 $\frac{2+a}{5} = 0$, 且 $\frac{2a-1}{5} \neq 0$, 所以 $a = -2$. 故选 D.
2. B 因为函数 $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ 的值域为 $[2, +\infty)$, 所以 $P = [2, +\infty)$, 由 $2^x \geq 1$ 得 $x \leq 3$, 所以 $Q = (-\infty, 3]$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} Q = (3, +\infty)$, 因为 $(3, +\infty) \not\subseteq [2, +\infty)$, 所以 $a \in P$ 是 $a \in \complement_{\mathbb{R}} Q$ 的必要不充分条件. 故选 B.
3. C 因为 $|b| = 2$, $|a - \frac{1}{2}b| = \frac{1}{2}$, 而 $|\frac{1}{2}b| - |a - \frac{1}{2}b| < |a| < |\frac{1}{2}b| + |a - \frac{1}{2}b|$. 故选 C.
4. B 设 $2\,020^{2\,021} = t$, 所以 $\lg t = 2\,021 \times \lg 2\,020$, 因为 $\lg 2\,020 \approx 3.305$, 所以 $\lg t = 2\,021 \times \lg 2\,020 \approx 6\,679.4$, 所以 $t \approx 10^{6\,679.4} \in (10^{6\,679}, 10^{6\,680})$, 所以 $2\,020^{2\,021}$ 的数位为 6 680. 故选 B.
5. A 易得函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, $f^e(a^2) = (e^{-a^2})^2 = e^{-2a^2} = f(2a^2)$, 所以 $f(3a-1) \geq f^e(a^2)$, 即为 $f(3a-1) \geq f(2a^2)$, 又函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 所以 $3a-1 \leq 2a^2$, 解得 $a \geq 1$ 或 $a \leq \frac{1}{2}$. 故选 A.
6. C 令 $g(x) = \frac{a^x}{1+a^x}$, $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, 易得 $g(-x) + g(x) = 1$, $h(-x) = -h(x)$, 所以 $f(x) + f(-x) = 1 + 2c$, 因为 $c \in \mathbb{Z}$, 所以 $f(x) + f(-x)$ 为奇数, 验证可知 ACD 三组数值和均为奇数, B 组数值和为偶数. 故 B 组数值一定不是 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 的值. 故选 C.
7. B $T_1 = S_1 = a_1$, $\therefore 2a_1 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$, 即 $S_1 = T_1 = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} (n \geq 2)$, $\therefore \frac{T_n}{T_{n-1}} + T_n = 1$, $\therefore \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}} = 1$, 即 $\{\frac{1}{T_n}\}$ 是以 2 为首项, 1 为公差的等差数列, 故 $\frac{1}{T_n} = 2 + n - 1 = n + 1$, $T_n = \frac{1}{n+1}$, $S_n = \frac{n}{n+1}$, $S_1 = \frac{1}{2}$ 也符合此式, $S_n = \frac{n}{n+1}$, $\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$, 又 $a_1 = \frac{1}{2}$, $\therefore a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $\therefore a_{10} = \frac{1}{10 \times (10+1)} = \frac{1}{110}$. 故选 B.
8. B 如图, 因为 $\angle NMF_2 = \angle MF_1F_2$, 所以 $MF_2 = F_1F_2 = 2c$, $NF_2 = 2MF_2 = 4c$, 由双曲线的定义可得 $MF_1 = 2c - 2a$, $NF_1 = 4c - 2a$, 所以 $MN = 6c - 4a$.
在 $\triangle F_1MN$ 中由余弦定理得 $\cos \angle F_1MF_2 = \frac{(6c-4a)^2 + (2c)^2 - (4c)^2}{2 \times 2c(6c-4a)} = \frac{3c^2 - 6ac + 2a^2}{c(3c-2a)}$.
在 $\triangle F_1F_2M$ 中由余弦定理得 $\cos \angle F_1MF_2 = \frac{(2c-2a)^2 + (2c)^2 - (2c)^2}{2 \times 2c(2c-2a)} = \frac{c-a}{2c}$, 所以 $\frac{3c^2 - 6ac + 2a^2}{c(3c-2a)} = \frac{c-a}{2c}$, 整理得 $3c^2 - 7ac + 2a^2 = 0$, 即 $3e^2 - 7e + 2 = 0$, 解得 $e = 2$ 或 $e = \frac{1}{3}$ (舍去). 所以双曲线的离心率等于 2. 故选 B.
9. BD 对于 A, 取出的卡片有三种情况: 2 张都是红色, 2 张都是蓝色, 1 张红色 1 张蓝色, 所以“取出的 2 张卡片都是红色”与“取出的 2 张卡片都是蓝色”为互斥事件, 而不是对立事件, 故 A 错误. 对于 B, 每次取出红色的卡片概率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $P(X=2) = C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$, 故 B 正确. 对于 C, 记两个数字为 5 的卡片分别为 A5, B5, 乙获胜包含的基本事件有 (0, 2), (0, A5), (0, B5), (2, A5), (2, B5), 所以在乙获胜的条件下, 甲取出的卡片上数字为 2 的概率为 $\frac{2}{5}$, 故 C 错误. 对于 D, 从 4 张卡片中无放回连续取 3 张卡片, 总共有 $A_4^3 = 24$ 种情况, 而 3 次所取到的数字依次为“5”“2”“0”的情况有 2 种, 所以“ $x_1x_2x_3$ ”为“520”的概率为 $\frac{1}{12}$, 故 D 正确.

【2021 年全国高考临门一卷(一)·数学参考答案 第 1 页(共 6 页)】



故选 BD.

10. ABC $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{2 + \cos 2x} = \frac{\sin 2x}{4 + 2\cos 2x}$, 所以 $f(x + \pi) = \frac{\sin 2(x + \pi)}{4 + 2\cos 2(x + \pi)} = \frac{\sin 2x}{4 + 2\cos 2x} = f(x)$, 所以 A

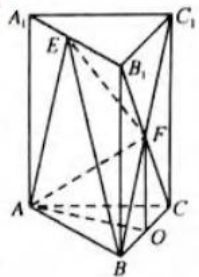
正确; 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = \frac{-\sin 2x}{4 + 2\cos 2x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x)$ 的图

象关于原点对称, 故 B 正确; $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin 2x}{2 + \cos 2x}$, 令 $k = \frac{\sin 2x}{2 + \cos 2x}$, 表示单位圆上的点

$(\cos 2x, \sin 2x)$ 与点 $(-2, 0)$ 连线的斜率, 易求 $k \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right]$, 故 C 正

确; $y = \frac{\cos 2x}{4 + 2\sin 2x}$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得 $y = \frac{\sin 2x}{4 - 2\cos 2x} \neq f(x)$, 故 D 错误. 故选 ABC.

11. AC 由题意, 画出正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 如图所示, 向量 $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BB}_1) = \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) + \frac{1}{2}\vec{AA}_1 = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AA}_1$, 故 A 正确;
假设存在点 E, 设 $\vec{A_1E} = \lambda \vec{A_1B_1}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 所以 $\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} = \vec{AA}_1 + \vec{A_1E} - \vec{AB} = \vec{AA}_1 + \lambda \vec{A_1B_1} - \vec{AB} = \vec{AA}_1 + (\lambda - 1)\vec{AB}$. 因为 $AF \perp BE$, 所以 $\vec{AF} \cdot \vec{BE} = \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AA}_1\right) \cdot [\vec{AA}_1 + (\lambda - 1)\vec{AB}] = \frac{1}{2}(\lambda - 1)\vec{AB}^2 + \frac{1}{2}\vec{AA}_1^2 + \frac{1}{2}(\lambda - 1)\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2}\lambda \vec{AA}_1 \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\lambda - 1) + \frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{1}{2}(\lambda - 1) \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0$, 解得 $\lambda = -\frac{5}{3}$. 故 B 错误; 因为正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 所以 $AB \parallel A_1B_1$, 所以 $V_{\text{棱锥 } E-ABF} = V_{\text{棱锥 } B_1-ABF} = V_{\text{棱锥 } F-AB B_1} = \frac{1}{2}V_{\text{棱锥 } C-AB B_1} = \frac{1}{2}V_{\text{棱锥 } B_1-ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$, 所以 $V_{\text{棱锥 } B-AEF} = V_{\text{棱锥 } E-ABF} = \frac{\sqrt{3}}{12}$, 故 C 正确; 设 BC 中点为 O, 所以 $AO \perp BC$, 又三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 是正三棱柱, 所以 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $\angle AFO$ 即 AF 与平面 BB_1C_1C 所成的角, $\cos \angle AFO = \frac{OF}{AF} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. 故 D 错误.



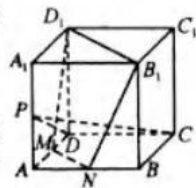
故选 AC.

12. AC 对于 A, 当圆 C_k 与 y 轴相切时, $|k| = k^2$, 所以 $k = 0$ (舍) 或 $k = 1$, 故 A 正确. 对于 B, 圆 C_k 与圆 C_{k+1} 的圆心距为 1, 两圆半径之差为 $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 > 1$, 所以圆 C_k 与圆 C_{k+1} 一定内含, 故 B 错误. 对于 C, 因为所有圆的圆心均在定直线 $y = 1$ 上, 所以当直线为 $y = 1$ 时, 它与所有的圆均相交, 故 C 正确. 对于 D, 若圆 C_k 经过原点, 则 $k^2 + 1 = k^4$, 解得 $k^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, k 无正整数解. 故 D 错误. 故选 AC.

13. 9 由所给数据可求得 $\bar{x} = \frac{2+3+4}{3} = 3$, $\bar{y} = \frac{10+a}{3}$, 代入线性回归方程 $\hat{y} = 2x - \frac{a}{5}$, 得 $\frac{10+a}{3} = 2 \times 3 - \frac{a}{5}$, 解得 $a = 5$, 所以当 $x = 5$ 时单位成本 $\hat{y} = 2 \times 5 - 1 = 9$ (元/件).

14. $\frac{1}{2}$ 在 $\text{Rt} \triangle AF_1F_2$ 中, 因为 $|F_2D| = \frac{1}{2}|F_1F_2|$, 所以 $\angle DF_1F_2 = 30^\circ$. 故 $\angle F_1F_2D = 90^\circ - \angle DF_1F_2 = 60^\circ$. 又 $|AF_1| = |AF_2|$, 所以 $\triangle AF_1F_2$ 是等边三角形. 故 $|AF_1| = |F_1F_2|$, 即 $a = 2c$. 故 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$. 即椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$.

15. 相交 (2 分) 36π (3 分) 当 P 为 AA_1 的中点时, 易得 $D_1M \perp PD$, $D_1M \perp CD$, $PD \cap CD = D$,
 $\therefore D_1M \perp$ 平面 PCD , $\because D_1M \subset$ 平面 MNB_1D_1 , $\therefore$ 平面 $PCD \perp$ 平面 MNB_1D_1 .
易知 CD 为平面 MNB_1D_1 的一条斜线, 故满足平面 $PCD \perp$ 平面 MNB_1D_1 的点 P 是唯一的, 所以 P 为棱 AA_1 的中点. 显然, MN 与平面 PCD 相交. $\because CD = 4$, $\therefore PD =$





$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $PC=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$. 易知三棱锥 $C-ADP$ 的外接球直径为 PC , 故其外接球体积为 36π .

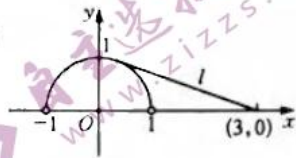
$$16. \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4S}{a^2+4bc} = \frac{4 \times \frac{1}{2} bcsin A}{b^2+c^2-2bc\cos A+4bc} = \frac{2\sin A}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 4 - 2\cos A} \leq \frac{2\sin A}{2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} + 4 - 2\cos A} = \frac{\sin A}{3 - \cos A} \quad (\text{当且仅当 } b=c \text{ 时取等号}).$$

仅当 $b=c$ 时取等号).

解法一: 令 $z = \frac{\sin A}{3 - \cos A} = -\frac{0 - \sin A}{3 - \cos A}$, 其几何意义为半圆弧上的点 $(\cos A, \sin A)$

与点 $(3, 0)$ 连线的斜率的相反数, 如图所示, 当 l 与半圆相切时, 设 l 斜率为 k ,

由 $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ (舍正), 则此时 z 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



解法二: 设 $f(A) = \frac{\sin A}{3 - \cos A}$, $A \in (0, \pi)$, 则 $f'(A) = \frac{3\cos A - 1}{(3 - \cos A)^2}$, 令 $f'(A) = 0$ 得 $\cos A = \frac{1}{3}$, 不妨设 $A_0 \in (0, \pi)$ 且 $\cos A_0 = \frac{1}{3}$, 当 $A \in (0, A_0)$ 时, $f'(A) > 0$, 当 $A \in (A_0, \pi)$ 时, $f'(A) < 0$, 所以当 $A = A_0$ 时 $f(A)$ 有最

大值, 此时 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $f(A)_{\max} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

17. 解: 若选条件① $2a\cos C + c = 2b$,

由余弦定理, 得 $2a \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c = 2b$, 所以 $b^2+c^2-a^2=bc$, 2分

所以 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$, 3分

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4分

若选条件② $\frac{4S}{\tan A} = c^2 \cos A + a \cos C$,

所以 $\frac{4 \times \frac{1}{2} bcsin A}{\frac{\sin A}{\cos A}} = c^2 \cos A + a \cos C$, 即 $2b \cos A = c \cos A + a \cos C$ 2分

由正弦定理, 得 $2\sin B \cos A = \sin C \cos A + \sin A \cos C = \sin(A+C) = \sin B$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$ 3分

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4分

若选条件③ $\sqrt{3} \left(b \sin C - \frac{c \cos B}{\tan C} \right) = a$,

所以 $\sqrt{3} (\sin B \sin C - \cos B \cos C) = \sin A$, 2分

即 $-\sqrt{3} \cos(B+C) = \sin A$, 所以 $\sqrt{3} \cos A = \sin A$, 即 $\tan A = \sqrt{3}$, 3分

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4分

因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$, 所以 $\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} b \cdot AD \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} c \cdot AD \sin \frac{A}{2}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{4} bc = \frac{\sqrt{3}}{4} b + \frac{\sqrt{3}}{4} c$, 即 $bc = b + c$, 6分

所以 $bc = b + c \geq 2\sqrt{bc}$, 所以 $\sqrt{bc} \geq 2$, 即 $bc \geq 4$, 当且仅当 $b=c$ 时等号成立, 8分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} bc \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ (当且仅当 $b=c$ 时等号成立).

- 即 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\sqrt{3}$ 10分
18. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $2S_1=a_1^2+a_1$, 即 $2a_1=a_1^2+a_1$, 解得 $a_1=1$ 或 $a_1=0$ (舍). 1分
- 当 $n \geq 2$ 时, $2S_n=a_n^2+a_n$, $2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$, 两式相减得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$, 又数列 $\{a_n\}$ 的各项为正数, 所以 $a_n-a_{n-1}=1$ ($n \geq 2$), 3分
- 所以数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项, 1为公差的等差数列. 所以 $a_n=1+(n-1) \times 1=n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 5分
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n \sqrt{a_{n+1}} + a_{n+1} \sqrt{a_n}} = \frac{1}{n \sqrt{n+1} + (n+1) \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$
- $= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 9分
- $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
- $= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 12分

19. 解: (1) 由题意可得关于商品和服务评价的 2×2 列联表如下:

	对服务好评	对服务不满意	合计
对商品好评	40	20	60
对商品不满意	35	5	40
合计	75	25	100

$$K^2 = \frac{100(40 \times 5 - 20 \times 35)^2}{75 \times 25 \times 60 \times 40} \approx 5.556 > 5.024, \dots\dots\dots 5分$$

故能在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下, 认为商品好评与服务好评有关. 6分

(2) 由(1)得从“对服务不满意”的评价中分层选出的 10 个评价中, “对商品好评”的有 8 个, “对商品不满意”的有 2 个, 故 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 7分

$$P(X=0) = \frac{C_2^1 C_8^0}{C_{10}^1} = \frac{2}{15},$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^0 C_8^1}{C_{10}^1} = \frac{8}{15},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_8^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}, \dots\dots\dots 10分$$

X	0	1	2
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$

..... 11分

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{2}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{5}. \dots\dots\dots 12分$$

20. (1) 证明: 在菱形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$ 1分

因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $DD_1 \perp AC$.

又 $BD \cap DD_1 = D$, $BD, DD_1 \subset$ 平面 B_1BDD_1 , 所以 $AC \perp$ 平面 B_1BDD_1 3分

在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, BB_1 与 DD_1 相交, 故 B_1, B, D, D_1 四点共面, 所以直线 $AC \perp$ 平面 BDB_1 5分

(2) 解: 记 AC 与 BD 交点为 O , 连接 B_1O , 在三角形 B_1BO 中, 由余弦定理计算得 $B_1O=1$,

由勾股定理得 $B_1O \perp BD$, 所以 $B_1O \perp$ 平面 $ABCD$, 即 $D_1D=1$ 7分

以 O 为原点, OB, OC, OB_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 可求得 $A(0, -1, 0)$,

$$A_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), B_1(0, 0, 1), C(0, 1, 0), C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \text{则 } \overrightarrow{A_1B_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \overrightarrow{AC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AC_1} =$$

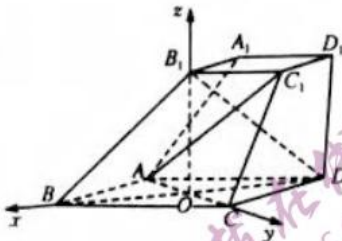
$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1)$ 9分

设平面 ACC_1 的法向量 $\vec{n}=(x, y, z)$, 则 $\begin{cases} 2y=0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y + z=0, \end{cases}$

取 $x=2$, 得平面 ACC_1 的一个法向量 $\vec{n}=(2, 0, \sqrt{3})$ 11分

记直线 A_1B_1 与平面 ACC_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\vec{A_1B_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{A_1B_1}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} =$

$\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12分



21. 解: (1) 因为 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 l 的斜率为 1, 则直线 l 的方程是 $y=x-2$, 即 $x=y+2$ 1分

联立 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=y+2, \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4y-8=0$,

设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} y_1+y_2=4, \\ y_1y_2=-8, \end{cases}$

..... 2分

则 $|\vec{AB}| = \sqrt{2} \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{2} \sqrt{4^2 - 4 \times (-8)} = 4\sqrt{6}$ 3分

又焦点 $F(1, 0)$ 到直线 l 的距离是 $d = \frac{|1-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 4分

所以 $\triangle FAB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot d = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$ 5分

(2) 设 l 的方程为 $x=my+2$, 与抛物线 C 的方程联立得 $y^2-4my-8=0$,

$\Delta = 16m^2 + 32 > 0$, $\begin{cases} y_1+y_2=4m, \\ y_1y_2=-8, \end{cases}$ 所以 $x_1x_2 = \frac{(y_1y_2)^2}{16} = 4$,

不妨设点 $A(x_1, y_1)$ 在 x 轴上方, 点 $B(x_2, y_2)$ 在 x 轴下方,

当 $y \geq 0$ 时, $y=2\sqrt{x}$, 所以 $y' = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $y'|_{x=x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_1}}$,

所以抛物线 C 上过点 A 的切线 l_1 的方程为 $y-y_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$, 即 $y = \frac{1}{\sqrt{x_1}}x - \sqrt{x_1} + y_1$ 6分

当 $y < 0$ 时, $y=-2\sqrt{x}$, 得 $y' = -2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $y'|_{x=x_2} = -\frac{1}{\sqrt{x_2}}$,

所以抛物线 C 上过点 B 的切线 l_2 的方程为 $y-y_2 = -\frac{1}{\sqrt{x_2}}(x-x_2)$, 即 $y = -\frac{1}{\sqrt{x_2}}x + \sqrt{x_2} + y_2$ 7分

联立 $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{x_1}}x - \sqrt{x_1} + y_1, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{x_2}}x + \sqrt{x_2} + y_2, \end{cases}$ 消去 y 得 $\frac{1}{\sqrt{x_1}}x - \sqrt{x_1} + y_1 = -\frac{1}{\sqrt{x_2}}x + \sqrt{x_2} + y_2$,

所以 $(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}})x = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + y_2 - y_1$, 9分

又 $y_2 = -2\sqrt{x_2}, y_1 = 2\sqrt{x_1}$,

所以 $\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}x = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 2\sqrt{x_2} - 2\sqrt{x_1}$,

所以 $\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2}x = -(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})$, 又 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \neq 0$,

所以 $x = -2$ 11分

【2021 年全国高考临门一卷(一)·数学参考答案 第 5 页(共 6 页)】



即点 M 的横坐标恒为 -2 .

所以点 M 在定直线 $x = -2$ 上. 12 分

22. 解: (1) 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{a}{x} + 1$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{(x^2)^2} + a \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1 - 2\ln x - ax}{x^3} \quad (x > 0), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

设 $g(x) = 1 - 2\ln x - ax$, 则 $f'(x)$ 与 $g(x)$ 同号.

所以 $g'(x) = -\frac{2}{x} - a$, 若 $a > 0$, 则 $g'(x) < 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 2 分

所以函数 $g(x) = 1 - 2\ln x - ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{又 } g(\sqrt{e}) = 1 - 2\ln \sqrt{e} - a\sqrt{e} = 1 - 2 \times \frac{1}{2} - a\sqrt{e} = -a\sqrt{e} < 0,$$

所以当 $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$ 时, 满足 $g(x) \leq g(\sqrt{e}) < 0$. 即当 $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$ 时, 满足 $f'(x) < 0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $[\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减. 4 分

(2) ① 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $g(x) = 1 - 2\ln x - ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x) = 0$ 不可能有两个根, 故 $f(x)$ 不可能有两个极值点. 6 分

② 当 $a < 0$ 时, 令 $g'(x) = -\frac{2}{x} - a > 0$, 得 $x > -\frac{2}{a}$; 令 $g'(x) = -\frac{2}{x} - a < 0$, 得 $0 < x < -\frac{2}{a}$.

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, -\frac{2}{a})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递增. 7 分

故函数 $g(x)$ 的单调情况如下表:

x	$(0, -\frac{2}{a})$	$-\frac{2}{a}$	$(-\frac{2}{a}, +\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$$\text{要使函数 } f(x) \text{ 在 } (0, 8) \text{ 内存在两个极值点, 则需满足 } \begin{cases} g(-\frac{2}{a}) < 0, \\ g(8) > 0, \\ 0 < -\frac{2}{a} < 8, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 1 - 2\ln(-\frac{2}{a}) - a(-\frac{2}{a}) < 0, \\ 1 - 2\ln 8 - 8a > 0, \\ 0 < -\frac{2}{a} < 8, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a > -\frac{2}{e^4}, \\ a < \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \ln 2, \\ a < -\frac{1}{4}. \end{cases} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又 } -\frac{2}{e^4} \approx -\frac{2}{4.5} \approx -0.44, \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \ln 2 \approx \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \times 0.693 \approx -0.395,$$

$$\text{所以 } -\frac{2}{e^4} < \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \ln 2 < -\frac{1}{4}. \text{ 所以 } -\frac{2}{e^4} < a < \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

$$\text{当 } a \in (-\frac{2}{e^4}, \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \ln 2) \text{ 时, } -\frac{1}{a} \in \left[\frac{e^4}{2}, \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{1}{8} \right], g\left(-\frac{1}{a}\right) = 2 - 2\ln\left(-\frac{1}{a}\right) > 0. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上, 存在实数 $a \in (-\frac{2}{e^4}, \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \ln 2)$, 使得函数 $f(x)$ 在 $(0, 8)$ 内存在两个极值点. 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》