

姓名 \_\_\_\_\_

准考证号 \_\_\_\_\_

## 郴州九校联盟 2023 届适应性测试 数学试题

本试卷共 8 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

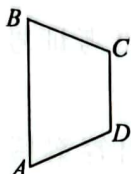
注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z$  满足  $z(1+i) = 1+2i$ , 则  $z$  在复平面上对应的点在  
A. 第一象限  
B. 第二象限  
C. 第三象限  
D. 第四象限
2. 已知集合  $A = \{(x, y) \mid y = |x|\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\}$ , 则集合  $A \cap B$  的真子集的个数为  
A. 3  
B. 7  
C. 15  
D. 31
3. 若双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > \sqrt{2}a > 0)$  的离心率  $e$  是方程  $3x^2 - 11x + 10 = 0$  的一个根, 则  $e =$   
A. 2  
B.  $\frac{5}{3}$  或 2  
C.  $\frac{5}{3}$   
D. 2 或  $\frac{5}{2}$
4. 已知向量  $a, b$  满足  $a \perp (a-2b)$ ,  $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ , 则向量  $a, b$  的夹角为  
A.  $\frac{\pi}{6}$   
B.  $\frac{\pi}{3}$   
C.  $\frac{\pi}{2}$   
D.  $\frac{2\pi}{3}$

5. 古希腊亚历山大时期的数学家帕普斯在《数学汇编》第3卷中记载着一个确定重心的定理：“如果同一平面内的一个闭合图形的内部与一条直线不相交，那么该闭合图形围绕这条直线旋转一周所得到的旋转体的体积等于闭合图形面积乘以该闭合图形的重心旋转所得周长的积”，即  $V=Sl$  ( $V$  表示平面图形绕旋转轴旋转的体积， $S$  表示平面图形的面积， $l$  表示重心绕旋转轴旋转一周的周长). 如图，等腰梯形  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , 已知  $AB=2CD=2BC=2AD=4$ , 则其重心  $G$  到  $AB$  的距离为



A.  $\sqrt{3}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$

C.  $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

D.  $2+\sqrt{3}$

6. 经过抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点  $F$ , 作斜率为  $2\sqrt{2}$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  交于  $A, B$  两点, 若  $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB}$ , 则  $\lambda =$

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$  或 3

C.  $\frac{1}{2}$  或 2

D. 3

7. 已知  $a = \ln 2, b = e^{0.1}, c = 1.1$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

A.  $a < b < c$

B.  $a < c < b$

C.  $b < c < a$

D.  $c < b < a$

8. 若存在直线与曲线  $f(x) = x^3 - x, g(x) = x^2 - a^2 + a$  都相切, 则  $a$  的取值范围是

A.  $[0, 2\sqrt{5}]$

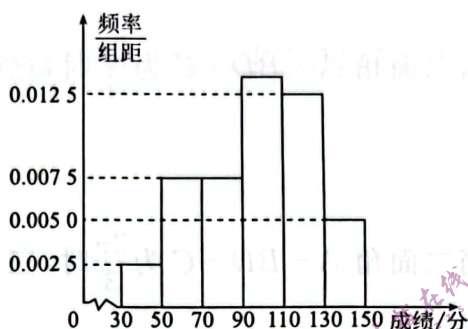
B.  $[-2\sqrt{5}, 0]$

C.  $[-\frac{3\sqrt{5}}{8}, 2]$

D.  $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 为了了解学生对于高中数学重要性的认识,进行了一个问卷调查. 用分层随机抽样法从某校高三年级2000名学生的问卷成绩(满分150分)中抽取一个容量为120的样本,将这120个学生的成绩分为6组,绘制得到如图所示的频率分布直方图(每组数据以区间的中点值为代表),下列说法正确的是



- A. 学生成绩的样本数据在 $[90, 110)$ 内的频率为0.015  
 B. 学生成绩的样本数据的众数为100  
 C. 学生成绩的样本数据的第75百分位数为118  
 D. 根据样本可以估计全体高三学生问卷成绩在110分以上的学生为840名
10. 电子通讯和互联网中,信号的传输、处理和傅里叶变换有关. 傅里叶变换能将满足一定条件的某个函数表示成三角函数(正弦和或余弦函数)的线性组合. 例如函数  $f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin 13x}{13}$  的图象就可以近似地模拟某种信号的波形, 则

- A.  $f(x)$ 为周期函数,且最小正周期为 $\pi$   
 B.  $f(x)$ 为奇函数  
 C.  $y=f(x)$ 的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称  
 D.  $f(x)$ 的导函数  $f'(x)$ 的最大值为7

11. 已知点  $P, Q$  分别是直线  $l: mx - y - 3m + 4 = 0$  和圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  上的动点, 则

- A. 点  $Q$  到直线  $l$  的最大距离为7  
 B. 当直线  $l$  被圆  $O$  所截得的弦长最大时,  $m$  的值为1

- C. 若直线  $l$  与圆  $O$  相切, 则  $m$  的值为  $\frac{12 \pm 2\sqrt{21}}{5}$

- D. 若直线  $l$  与被圆  $O$  截得的弦长为  $2\sqrt{3}$ , 则  $m$  的值为  $\frac{6 \pm \sqrt{6}}{4}$

12. 已知边长为 2 的菱形  $ABCD$ , 沿对角线  $BD$  折起, 使点  $C$  不在平面  $ABD$  内,  $O$  为  $BD$  的中点, 在翻折过程中, 则

A. 在任何位置, 都存在  $AC \perp BD$

B. 若  $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$ , 当平面  $BCD \perp$  平面  $ABD$  时, 异面直线  $AB$  与  $CD$  所成角的余弦值为  $\frac{1}{4}$

C. 若  $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$ , 当二面角  $A-BD-C$  为  $\frac{2\pi}{3}$  时, 三棱锥  $C-ABD$  的体积为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D. 若  $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$ , 当二面角  $A-BD-C$  为  $\frac{2\pi}{3}$  时, 三棱锥  $C-AOB$  的外接球的体积为  $\frac{4\pi}{3}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $2x + y = 1$ , 则  $x^2 + \frac{1}{4}y^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.

14. 已知某种商品的直播平台支出  $x$  (单位: 万元) 与农产品销售额  $y$  (单位: 万元) 之间有如下对应数据:

$x$	2	3	4	6	7	8
$y$	7.5	11.5	$m$	31.5	36.5	43.5

根据上表可得线性回归方程  $\hat{y} = 6x + \hat{a}$ , 但由于操作员不慎, 导致一个数据丢失, 但可以知道  $(\bar{x}, \bar{y})$  在函数  $y = x^2$  的图象上, 据此估计, 可以得到  $m$  的值为\_\_\_\_\_; 当投入 12 万元时, 销售额大约为\_\_\_\_\_万元.

15. 已知多项式  $(x-1)^6 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_6(x+1)^6$ , 则  $a_2 + a_3$  的值为\_\_\_\_\_.

16. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 且函数  $f(x) - 1$  为奇函数, 则  $f(3x+4) + f(1-x) < 2$  的解集为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且 
$$\frac{\sin A - \sin B + \sin C}{\sin C} = \frac{b}{a + b - c}.$$

- (1) 求角  $A$ ;
- (2) 若  $\triangle ABC$  的外接圆半径为 1，求  $\triangle ABC$  的周长的最大值.



18. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1, a_2 = 2, (2n+3)S_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)S_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

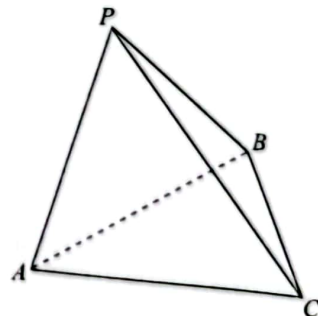
(2) 已知数列  $\left\{ \log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n, c_n = [T_n]$  (取整函数  $[x]$  表示不超过  $x$  的整数, 如  $[2.1] = 2$ ), 求数列  $\{c_n\}$  的前 100 项的和  $M_{100}$ .

19. (本小题满分 12 分)

在三棱锥  $P-ABC$  中, 已知  $\triangle PAB$  为正三角形,  $CA = CB = \sqrt{5}, AB = 2$ .

(1) 求证:  $AB \perp PC$ ;

(2) 若  $PC = \sqrt{7}$ , 求二面角  $P-AC-B$  的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

第 19 届亚运会组委会消息, 亚运会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州举行. 为此某校举办了以“迎亚运”为主题的篮球和排球比赛, 每个学生只能报名参加一项, 某调研组在校内参加报名的学生中随机选取了男生、女生各 100 人进行了采访, 其中参加排球比赛的归为甲组, 参加篮球比赛的归为乙组, 调查发现甲组成员 96 人, 其中男生 36 人.

	甲组	乙组	合计
男生			
女生			
合计			

(1) 根据以上数据, 补充上述  $2 \times 2$  列联表, 并依据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验, 分析学生喜欢排球还是篮球是否与“性别”有关;

(2) 现从调查的男生中, 按分层抽样选出 25 人, 从这 25 人中再随机抽取 3 人发放礼品, 发放礼品的 3 人在甲组中的人数为  $X$ , 求  $X$  的分布列及数学期望.

参考公式:  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$

参考数据:

$\alpha$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$x_\alpha$	2.706	3.841	6.635	7.841	10.828

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 直线  $l: y = kx + m$  与椭圆交于  $B, C$  两点. 当直线  $l$  的方程为  $y = \sqrt{3}x - 3$  时, 经过椭圆长轴的一个顶点.

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 坐标原点为  $O$ , 在  $E$  上有异于  $B, C$  的一点  $A(p, q)$ , 满足  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$ , 试判断  $\triangle ABC$  的面积是否为定值? 如果为定值, 求出定值; 如果不是定值, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^x, g(x) = \frac{1}{x}$ .

(1) 若  $h(x) = f(x) - mg(x) (m \in \mathbf{R})$ , 判断  $h(x)$  的零点个数;

(2) 当  $x > 0$  时, 不等式  $exf(x) \geq \frac{a+1}{g(x)} + \ln x + 2$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.