绝密★启用前

2023年普通高等学校全国统一模拟招生考试
新未来5月联考
理科数学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生号 班级 姓名

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 回答选考题时，考生须按照题目要求作答，并用2B铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|2^x>4\}$，$B=\{x||x-1|<3\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-\infty,4)$　　B. $(-2,4)$

C. $(2,4)$　　D. $(4,+\infty)$

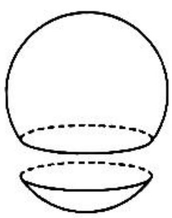
2. 已知复数 z 满足 $(1+2i)z=-1+3i$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=8$，$\left|\frac{5}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|=7$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. -24　　B. -12　　C. 12　　D. 24

4. 一个球体被平面截下的一部分叫做球缺. 截面叫做球缺的底面，垂直于截面的直径被截后，剩下的线段长叫做球缺的高，球缺曲面部分的面积 $S=2\pi RH$，其中 R 为球的半径，H 为球缺的高. 如图，若一个半径为 R 的球体被平面所截获得两个球缺，其高之比为 $\frac{H_1}{H_2}=2$，则表面积（包括底面）之比 $\frac{S_1}{S_2}=$

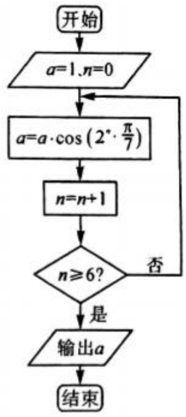


A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{8}{5}$　　C. $\frac{20}{11}$　　D. $\frac{10}{3}$

5. 设 F 为抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点，点 P 在抛物线上，点 Q 在准线 l 上，满足 $PQ/\!/x$ 轴. 若 $|PQ|=|QF|$，则 $|PF|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{3}$

6. 执行如图所示的程序框图，则输出 a 的值为



A. $-\frac{1}{64}$

B. $-\frac{1}{32}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{32}$

7. 已知 $a=\log_5 11, b=\log_2\sqrt{8}, c=\sqrt{e}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<b<c$

8. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $2S_n=a_n(a_n+1)$，则 $a_{2023}=$

A. 2022　　B. 2023　　C. 2024　　D. 2025

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$ 的图象在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内有且仅有一条对称轴，则 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的最小值为

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 随机掷两枚质地均匀的骰子，它们向上的点数之和除以 4，余数分别为 0，1，2，3，所对应的概率分别为 P_0,P_1,P_2,P_3，则 $2P_3-3P_2+P_1-P_0=$

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{4}{9}$

11. 已知斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 经过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F，交双曲线 C 的右支于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{FB}$，则双曲线的离心率为

A. $\frac{6}{5}$　　B. $\frac{7}{5}$　　C. $\frac{10}{7}$　　D. $\frac{4}{3}$

12. 若 $\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln 2x-\frac{ae^x}{2}\leqslant\ln a$ 恒成立，则 a 的最小值为

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{2}{e}$　　C. e　　D. e^2

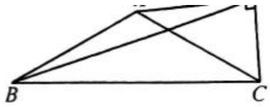
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 二项式 $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 x^5 的系数为________.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)+f(x+1)=f(2)=1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=$________.

15. 已知 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点，若 $AB=2$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则当 DP 取最小值时，三棱锥 A_1-ABP 的体积为________.

16. 如图，在等腰△ABC 中，$AB=AC$，$\angle ABC=\frac{\pi}{6}$，点 D 在△ABC 所在的平面内，且$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$. 当$\frac{BD}{CD}$取得最小值时，$\frac{AD}{CD}=$________.



三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\frac{1}{n}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

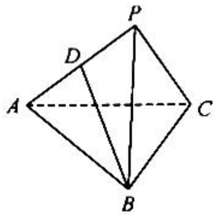
（2）求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 $PAC\perp$底面 ABC，且△ABC 为等边三角形，$PA\perp PC$，$\angle PAC=\frac{\pi}{6}$，D 为 PA 的中点.

（1）求证：$AP\perp BD$；

（2）求直线 BD 与平面 PBC 所成角的正弦值.



19.（本小题满分 12 分）

清明节，又称踏青节、行清节、三月节、祭祖节等，是传统的重大春祭节日，扫墓祭祀、缅怀祖先是中华民族自古以来的优良传统. 某社区进行流动人口统计，得知近 5 年回老家 2 次及以上的人数占比约为 90%，现在随机抽取了 100 人，了解他们今年是否回老家祭祖，得到如下不完整的 2×2 列联表：

	回老家	不回老家	总计
50 周岁及以下		55	
50 周岁以上	15		40
总计			100

（1）根据统计完成以上 2×2 列联表，依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，并根据表中数据分析，是否有把握认为回老家祭祖与年龄有关？

（2）从社区流动人口中随机抽取 3 人，设其中近 5 年回老家 2 次及以上的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

α	0.100	0.050	0.010	0.001
x_o	2.706	3.841	6.635	10.828

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$过点 $M\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，且离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若直线 $l:y=x+m$ 与椭圆 C 交 y 轴右侧于不同的两点 A,B，试问：$\triangle MAB$ 的内心是否在一条定直线上？若是，请求出该直线方程；若不是，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x}$，$g(x)=a\ln x$，$a>0$.

(1)若 $a=\dfrac{1}{2}$，$f(x)<g(x)$在$(0,t)$上恒成立，求实数 t 的取值范围；

(2)若函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象有且只有一条公共切线，求 a 的值.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=-2\sin\theta$.

(1)求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2)设直线 $l:\sqrt{3}x+y=0$ 与曲线 C_1，C_2 分别交于 A,B 两点（异于极点），求线段 AB 的长度.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知 $a>0,b>0$，函数 $f(x)=|x+a|+|x-b|$的最小值为 2，证明：

(1)$3a^2+b^2\geqslant 3$；

(2)$\dfrac{4}{a+1}+\dfrac{1}{b}\geqslant 3$.

2023 年普通高等学校全国统一模拟招生考试

新未来 5 月联考·理科数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】C

【解析】$\because A=\{x|x>2\}, B=\{x|-2<x<4\}, \therefore A\cap B=(2,4)$. 故选 C.

2.【答案】A

【解析】依题意，$z=\dfrac{-1+3i}{1+2i}=1+i$，$\therefore |z|=\sqrt{2}$. 故选 A.

3.【答案】C

【解析】依题意，$\left|\dfrac{5}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{25}{9}\boldsymbol{a}^2-\dfrac{10}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{25-\dfrac{10}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+64}=7$，

$\therefore 25-\dfrac{10}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+64=49$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$. 故选 C.

4.【答案】B

【解析】$\because \dfrac{H_1}{H_2}=2, H_1+H_2=2R, \therefore H_1=\dfrac{4}{3}R, H_2=\dfrac{2}{3}R, \therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2\pi R\cdot\dfrac{4}{3}R+\pi\left[R^2-\left(\dfrac{1}{3}R\right)^2\right]}{2\pi R\cdot\dfrac{2}{3}R+\pi\left[R^2-\left(\dfrac{1}{3}R\right)^2\right]}=\dfrac{8}{5}$. 故选 B.

5.【答案】A

【解析】依题意，$|PQ|=|QF|=|PF|$，$\triangle PQF$ 为等边三角形，$\therefore |PF|=|PQ|=4|OF|=2$. 故选 A.

6.【答案】A

【解析】第一次循环：$a=\cos\dfrac{\pi}{7}, n=1$；第二次循环：$a=\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}, n=2$；第三次循环：$a=\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}, n=3$；……，第 6 次循环：$a=\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{7}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{2^5\pi}{7}, n=6$.

$\therefore \cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{7}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{2^5\pi}{7}=\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{7}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{32\pi}{7}}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}$

$=\dfrac{\sin\dfrac{64\pi}{7}}{64\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\dfrac{1}{64}$. 故选 A.

7.【答案】D

【解析】$a=\log_5 11=\log_5\sqrt{121}<\log_5\sqrt{125}=\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{3}{2}, c=\sqrt{e}>\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}, \therefore c>b>a$. 故选 D.

8.【答案】B

【解析】由题意，$2S_n=a_n^2+a_n$，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}(n\geqslant 2)$，两式相减，得 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，

$\therefore a_n^2-a_{n-1}^2=a_n+a_{n-1}$. $\because a_n>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=1$. 当 $n=1$ 时，$2S_1=a_1^2+a_1$，$\therefore a_1=1$，

$\therefore \{a_n\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列. $\therefore a_{2023}=2023$. 故选 B.

9.【答案】B

【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{1}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right)$，

∵函数 $f(x)$ 的图象在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内有且仅有一条对称轴，∴ $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，即 $\frac{2}{3}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$，

∴ $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，∴ $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. 故选 B.

10.【答案】B

【解析】由题设，两枚骰子所得点数和除以 4 的余数情况如下：

除以 4 的余数	1	2	3	4	5	6
1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0
3	0	1	2	3	0	1
4	1	2	3	0	1	2
5	2	3	0	1	2	3
6	3	0	1	2	3	0

由上表知：共 36 种情况，其中余数为 0，1，2，3 分别有 9 种、8 种、9 种、10 种.

所以 $P_1=\frac{2}{9}$，$P_0=P_2=\frac{1}{4}$，$P_3=\frac{5}{18}$，可得 $2P_3-3P_2+P_1-P_0=\frac{5}{9}-\frac{3}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{4}=-\frac{2}{9}$. 故选 B.

11.【答案】C

【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+c$，其中 $c^2=a^2+b^2$.

联立 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+c,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(b^2-3a^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy+3b^4=0$. ∴ $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}b^2c}{b^2-3a^2}$，$y_1y_2=\frac{3b^4}{b^2-3a^2}$.

由 $\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{FB}$，得 $y_1=-6y_2$，即 $\frac{y_1}{y_2}=-6$，∴ $\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}=-\frac{37}{6}$，即 $\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=-\frac{25}{6}$.

∴ $\frac{\left(-\frac{2\sqrt{3}b^2c}{b^2-3a^2}\right)^2}{\frac{3b^4}{b^2-3a^2}}=\frac{4c^2}{b^2-3a^2}=-\frac{25}{6}$，整理得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{100}{19}$，∴离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{7}$. 故选 C.

12.【答案】B

【解析】依题意，$\ln 2x-\frac{ae^x}{2}\leqslant\ln a\Leftrightarrow\ln 2x-\ln a\leqslant\frac{ae^x}{2}\Leftrightarrow 2\ln\frac{2x}{a}\leqslant ae^x\Leftrightarrow\frac{2x}{a}\ln\frac{2x}{a}\leqslant e^x\cdot\ln e^x$.

若 $0\leqslant\frac{2x}{a}\leqslant1$，显然成立，此时满足 $\frac{2x}{a}\leqslant1<e^x$；若 $\frac{2x}{a}>1$，令 $f(x)=x\ln x$，$f'(x)=\ln x+1>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，∴ $y=f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $\frac{2x}{a}\ln\frac{2x}{a}\leqslant e^x\ln e^x$，∴ $\frac{2x}{a}\leqslant e^x$.

综上，$\frac{2x}{a}\leqslant e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，∴ $a\geqslant\frac{2x}{e^x}$.

令 $g(x)=\frac{2x}{e^x}$，$g'(x)=\frac{2-2x}{e^x}$，易知 $g(x)\leqslant g(1)=\frac{2}{e}$，即 $a\geqslant\frac{2}{e}$. 故选 B.

13.【答案】10

【解析】展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^r\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{5-r}=C_5^r\cdot(-1)^{5-r}\cdot x^{\frac{5}{2}(r-1)}$，令 $\frac{5}{2}(r-1)=5$，得 $r=3$，

∴展开式中含 x^5 的系数为 $C_5^3\cdot(-1)^2=10$.

14.【答案】1012

【解析】依题意，$f(x+3)+f(x+1)=f(2)=1$，∴$f(x+1)+f(x-1)=f(2)=1$. ∴$f(x+3)=f(x-1)$，即 $f(x+4)=f(x)$，∴$f(x)$是以 4 为周期的周期函数. 令 $x=-1$，得 $f(2)+f(0)=f(2)$，∴$f(0)=0=f(4)$，令 $x=0$，则 $f(3)+f(1)=f(2)$，∴$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2f(2)=2$，∴$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=505\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+[f(1)+f(2)+f(3)]=1012$.

15.【答案】$\frac{4\sqrt{5}}{15}$

【解析】∵$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，∴点 P 的轨迹是以 AB 为直径的两段半圆弧. 取 AB 中点 O，连接 DO，当 DP 取最小值时，P 为线段 DO 与半圆弧的交点. 此时可求得△PAB 的面积为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，三棱锥 A_1-ABP 的体积为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

16.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{6}$

【解析】设∠$CAD=\alpha$. 显然，当点 D 在△ABC 内时，$\frac{BD}{CD}$取得最小值.

此时 $\frac{BD^2}{CD^2}=\frac{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD}{CD^2}=\frac{AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)}{CD^2}$

$=\frac{2AD^2+CD^2-2AC\cdot AD\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{AD}{AC}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{CD}{AC}\right)}{CD^2}=\frac{3AD^2+CD^2-\sqrt{3}AD\cdot CD}{CD^2}=3\left(\frac{AD}{CD}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\frac{AD}{CD}+1$.

设 $t=\frac{BD^2}{CD^2}$，$x=\frac{AD}{CD}$，则 $3x^2-\sqrt{3}x+1-t=0$ 方程一定有解，则 $\Delta=3-4\times3(1-t)\geqslant0$，即 $t\geqslant\frac{3}{4}$.

∴$\frac{BD}{CD}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，当$\frac{BD}{CD}$取最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$x=\frac{AD}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

17.【答案】(1)$a_n=n\times3^{n-1}$　(2)$S_n=\frac{(2n-1)\times3^n+1}{4}$

【解析】(1)由 $\frac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\frac{1}{n}$，得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=3\times\frac{a_n}{n}$. ………………………… 3 分

又 $\frac{a_1}{1}=1$，∴$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是以 1 为首项，3 为公比的等比数列. ………………………… 4 分

∴$\frac{a_n}{n}=3^{n-1}$，$a_n=n\times3^{n-1}$；………………………… 6 分

(2)$S_n=1\times3^0+2\times3^1+\cdots+n\times3^{n-1}$，①

①×3 得 $3S_n=1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$，② ………………………… 9 分

①－②得 $-2S_n=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\times3^n=\frac{3^n-1}{2}-n\times3^n$，

∴$S_n=\frac{(2n-1)\times3^n+1}{4}$. ………………………… 12 分

18.【答案】(1)略　(2)$\frac{2\sqrt{195}}{65}$

【解析】(1)证明：如图，取 AC 中点 E，连接 DE，BE，

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore BE\perp AC$，…………………………………………………………………… 2 分

又侧面 $PAC\perp$ 底面 ABC，$BE\subset$ 底面 ABC，侧面 $PAC\cap$ 底面 $ABC=AC$，

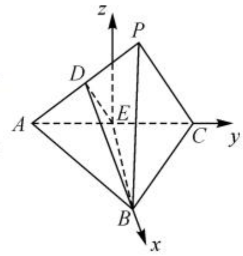
$\therefore BE\perp$ 平面 PAC. $\because PA\subset$ 平面 PAC，$\therefore BE\perp PA$，

又 D,E 分别为 PA,AC 中点，$\therefore DE/\!/PC$，…………………………………………………………… 4 分

又 $PA\perp PC$，$\therefore PA\perp DE$，

$\because DE\cap BE=E$，$DE,BE\subset$ 平面 BDE，$\therefore PA\perp$ 平面 BDE，

又 $BD\subset$ 平面 BDE，$\therefore PA\perp BD$；………………………………………………………………… 6 分



(2)以 E 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，设等边$\triangle ABC$ 的边长为 4，

$\therefore B(2\sqrt{3},0,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,1,\sqrt{3})$，$D\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，……………………… 8 分

$\therefore \overrightarrow{DB}=\left(2\sqrt{3},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB}=(2\sqrt{3},-2,0)$， ………… 9 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y-\sqrt{3}z=0,\\ 2\sqrt{3}x-2y=0,\end{cases}$ 则可取 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$，……………………… 11 分

$\therefore |\cos\langle\overrightarrow{DB},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{195}}{65}$.

$\therefore$ 直线 BD 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{195}}{65}$. ……………………………………………………… 12 分

19.【答案】(1)列联表见解析：有把握认为是否回老家祭祖与年龄有关　(2)分布列见解析：$E(X)=2.7$

【解析】(1)补全表格如下：

	回老家	不回老家	总计
50 周岁及以下	5	55	60
50 周岁以上	15	25	40
总计	20	80	100

…… 3 分

$\chi^2=\frac{100\times(5\times25-15\times55)^2}{20\times80\times60\times40}=\frac{1225}{96}\approx12.760>10.828$.

$\therefore$ 有把握认为是否回老家祭祖与年龄有关；……………………………………………………………… 6 分

(2)由题意，一个居民近 5 年回老家 2 次及以上的概率为 0.9，$X\sim B(3,0.9)$，X 的所有可能取值为 0，1，2，3.

…… 7 分

则 $P(X=0)=C_3^0\times0.1^3=0.001$，………………………………………………………………… 8 分

$P(X=1)=C_3^1\times0.9\times0.1^2=0.027$，………………………………………………………………… 9 分

$P(X=2)=C_3^2\times0.9^2\times0.1=0.243$，……………………………………………………………… 10 分

$P(X=3)=C_3^3\times0.9^3=0.729$. ………………………………………………………………………… 11 分

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.001	0.027	0.243	0.729

数学期望 $E(X)=0\times0.001+1\times0.027+2\times0.243+3\times0.729=2.7$. …………………………… 12 分

20.【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ (2)$\triangle MAB$ 的内心在定直线 $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 上

【解析】(1)依题意，$\begin{cases}\frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}{b^2}=1,\\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=2,\end{cases}$ …… 3 分

∴椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$； …… 4 分

(2)联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=x+m,\end{cases}$ 得 $3x^2+4mx+2m^2-4=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{3}$，…… 6 分

∴$y_1+y_2=x_1+x_2+2m=\frac{2m}{3}$，$x_1y_2+x_2y_1=x_1(x_2+m)+x_2(x_1+m)=2x_1x_2+m(x_1+x_2)=-\frac{8}{3}$， …… 8 分

∴$k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{x_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}}+\frac{y_2-\frac{\sqrt{6}}{3}}{x_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{x_1y_2+x_2y_1-\frac{\sqrt{6}}{3}(x_1+x_2)-\frac{2\sqrt{6}}{3}(y_1+y_2)+\frac{8}{3}}{\left(x_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}$. …… 10 分

又 $x_1y_2+x_2y_1-\frac{\sqrt{6}}{3}(x_1+x_2)-\frac{2\sqrt{6}}{3}(y_1+y_2)+\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}+\frac{4\sqrt{6}m}{9}-\frac{4\sqrt{6}}{9}m+\frac{8}{3}=0$.

∴$k_{MA}+k_{MB}=0$ 恒成立.

故$\angle AMB$ 的平分线总垂直于 x 轴.∴$\triangle MAB$ 的内心在定直线 $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 上. …… 12 分

21.【答案】(1)$(0,1]$ (2)$a=\frac{1}{2}$

【解析】(1)当 $x\in(0,+\infty)$ 时，令 $h(x)=f(x)-g(x)$.

∴$h(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\ln x$，$h'(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}=\frac{1-x}{2x^2}$. …… 2 分

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$.

∴$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ∴$h(x)\leqslant h(1)=0$.

根据题意，t 的取值范围为 $(0,1]$； …… 4 分

(2)$f'(x)=\frac{1}{2x^2}$，$g'(x)=\frac{a}{x}$.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 上各有一点 $A\left(x_1,\frac{x_1-1}{2x_1}\right)$，$B(x_2,a\ln x_2)$，

∴$f(x)$ 以 A 为切点的切线方程为 $y=\frac{x}{2x_1^2}+\frac{x_1-2}{2x_1}$，

$g(x)$ 以 B 为切点的切线方程为 $y=\frac{a}{x_2}x+a\ln x_2-a$， …… 6 分

由两条切线重合，得 $\begin{cases}\frac{1}{2x_1^2}=\frac{a}{x_2},\\ \frac{x_1-2}{2x_1}=a\ln x_2-a,\end{cases}$ 方程组有唯一解， …… 7 分

消去 x_2，整理得 $2a\ln x_1+\frac{1}{x_1}+a\ln 2a-a-\frac{1}{2}=0$， …………………………………… 8 分

令 $\varphi(x)=2a\ln x+\frac{1}{x}+a\ln 2a-a-\frac{1}{2}$，$\varphi'(x)=\frac{2ax-1}{x^2}$，

可知 $\varphi(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增，

$\varphi(x)=0$ 有唯一解，则 $\varphi\left(\frac{1}{2a}\right)=0$，即 $2a\ln\frac{1}{2a}+2a+a\ln 2a-a-\frac{1}{2}=0$. $\therefore a\ln 2a-a+\frac{1}{2}=0$，……… 10 分

令 $F(a)=a\ln 2a-a+\frac{1}{2}$，$F'(a)=\ln 2a$，

可知 $F(a)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

又 $F\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$\therefore a\ln 2a-a+\frac{1}{2}=0$ 有唯一实数根 $a=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一条公共切线. …………………………………… 12 分

22.【答案】(1)曲线 $C_1:\rho=2\cos\theta$；曲线 $C_2:x^2+(y+1)^2=1$　(2)$\sqrt{3}-1$

【解析】(1)曲线 C_1：$\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，消去参数得 $(x-1)^2+y^2=1$，………………………… 2 分

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入，得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. …………………………………… 4 分

由 $\rho=-2\sin\theta$ 得 $\rho^2=-2\rho\sin\theta$. $\therefore x^2+y^2=-2y$.

$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+(y+1)^2=1$；…………………………………………………… 5 分

(2)易知直线 l 的极坐标方程为 $\theta=-\frac{\pi}{3}$，…………………………………………………… 7 分

代入曲线 C_1，C_2 的极坐标方程得 $\rho_1=1$，$\rho_2=\sqrt{3}$，…………………………………………… 9 分

$\therefore |AB|=\sqrt{3}-1$. ……………………………………………………………………… 10 分

23.【答案】(1)略　(2)略

【解析】由于 $a>0$，$b>0$，则 $f(x)=|x+a|+|x-b|\geqslant|a+b|=a+b$，当且仅当 $-a\leqslant x\leqslant b$ 取等号，

故 $f(x)=|x+a|+|x-b|$ 的最小值为 $a+b=2$. …………………………………………… 2 分

证明：(1)$\because a>0$，$b>0$，$a+b=2$，$\therefore 0<a<2$，$0<b<2$. ………………………………… 3 分

$\therefore 3a^2+b^2=3a^2+(2-a)^2=4a^2-4a+4=(2a-1)^2+3\geqslant3$.

当且仅当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$ 时取等号； …………………………………………………… 6 分

(2)$\because a+b=2$，$\therefore a+1+b=3$. …………………………………………………… 7 分

$\therefore \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}(a+1+b)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{4b}{a+1}+\frac{a+1}{b}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{4b}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b}}\right)=3$，… 9 分

当且仅当 $\frac{4b}{a+1}=\frac{a+1}{b}$，即 $a=b=1$ 时取等号. …………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。