2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（二）

考试时间：2022 年 7 月 28 日上午 8:30 — 11:20

一、（本题满分 40 分）

求所有的整数n，使得对任意两两不等的正实数a、b、c，都有：

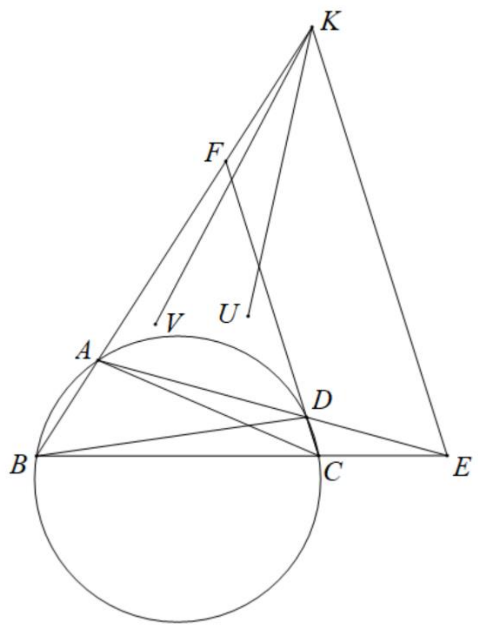
$$\frac{a^{n+1}}{|b-c|^n}+\frac{b^{n+1}}{|c-a|^n}+\frac{c^{n+1}}{|a-b|^n}\geqslant a+b+c.$$

二、（本题满分 40 分）

已知数列$\{F_n\}$满足：$F_0=0$，$F_1=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in\mathbf{N})$. 对大于 2 的整数 m，记 R_m为$\prod_{k=1}^{F_m-1}k^k$除以F_m的余数. 证明：R_m在数列$\{F_n\}$中.

三、（本题满分 50 分）

如图,圆内接四边形 $ABCD$ 中,$BD>AC$, 直线 BC、AD 交于 E,直线 AB、CD 交于 F, 过 E 作直线 CD 的平行线交直线 AB 于 K, U、V 分别为$\triangle FAC$、$\triangle FBD$ 的外心. 证明:$\angle UKV=\angle BCD-\angle ABC$.**（答题时请将图画在答卷纸上）**



四、（本题满分 50 分）

给定正整数$k\geqslant l$. 设m为最小的正整数, 满足对所有$n\geqslant m$, 无论如何将一个n阶完全图的所有边染为红蓝两色之一, 都存在一条红色的长为k的路或一条蓝色的长为l的路. 证明: $m=k+\left[\frac{l+1}{2}\right]$.

注: 一条长为t的路由$t+1$个点$U_1,U_2,\ldots,U_{t+1}$构成, 满足对任意的$1\leqslant i\leqslant t$, U_i与U_{i+1}之间均有边连接.

2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（二）

考试时间：2022 年 7 月 28 日上午 8:30 — 11:20

一、（本题满分 40 分）

求所有的整数n，使得对任意两两不等的正实数a、b、c，都有：

$$\frac{a^{n+1}}{|b-c|^{n}}+\frac{b^{n+1}}{|c-a|^{n}}+\frac{c^{n+1}}{|a-b|^{n}}\geqslant a+b+c.$$

解: n为自然数.

当$n=0$时, 显然.

当$n\geq 1$时，不妨设$c=\min\{a,b,c\}$ ，由均值不等式知：

$$\frac{a^{1+n}}{|b-c|^{n}}+n|b-c|\geq(1+n)a,$$
$$\frac{b^{1+n}}{|c-a|^{n}}+n|c-a|\geq(1+n)b,$$

$$\frac{a^{1+n}}{|b-c|^{n}}+\frac{b^{1+n}}{|c-a|^{n}}+\frac{c^{1+n}}{|a-b|^{n}}\geq(1+n)a+(1+n)b-n|b-c|-n|c-a|$$
$$=a+b+2nc\geq a+b+c.$$

…………30 分

当$n<0$时, 取$a=1+\frac{1}{m},b=1,c=1-\frac{1}{m}$，令$m\to+\infty$, 则有: $0>3$, 矛盾。

…………40 分

二、（本题满分 40 分）

已知数列$\{F_n\}$满足：$F_0=0$，$F_1=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in\mathbf{N})$．对大于 2 的整数 m，记

R_m为$\prod_{k=1}^{F_m-1}k^k$除以F_m的余数．证明：R_m在数列$\{F_n\}$中．

证明：由$m>2$可知$F_m\ge 2$．当F_m为合数时，$F_m\mid\prod_{k=1}^{F_m-1}k^k$，故$R_m=0=F_0$，成立．

当F_m为质数时，若$F_m=2$，则$R_m=1=F_1$，成立．

当F_m为奇质数p时，

则$$\prod_{k=1}^{p-1}k^k=\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}k^k(p-k)^{p-k}\equiv\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}k^p(-1)^{p-k}\equiv\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}k(-1)^{k+1}=(\frac{p-1}{2})!(-1)^{\frac{(p-1)(p+5)}{8}}(\mathrm{mod}\ p)$$

………………………..10 分

由$F_0=0$，$F_1=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in\mathbf{N})$知$F_n=\frac{\sqrt5}{5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^n-(\frac{1-\sqrt5}{2})^n]$．

对$2\mid m$，有

$$F_{m+1}\cdot F_{m-1}-{F_m}^2=\frac15[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{m+1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{m+1}][(\frac{1+\sqrt5}{2})^{m-1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{m-1}]-\frac15[(\frac{1+\sqrt5}{2})^m-(\frac{1-\sqrt5}{2})^m]^2$$

$$=\frac15(\frac{1+\sqrt5}{2}\times\frac{1-\sqrt5}{2})^{m-1}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{m+1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{m+1}][2\times\frac{1+\sqrt5}{2}\times\frac{1-\sqrt5}{2}-(\frac{1+\sqrt5}{2})^2-(\frac{1-\sqrt5}{2})^2]$$

$$=\frac15\times(-1)\times(-(\sqrt5)^2)=1$$

故对$2\nmid m$，有${F_{m-1}}^2\equiv-1(\mathrm{mod}\,F_m)$． 即$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv {F_{m-1}}^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$，

………………………..20 分

从而对$2\nmid m$，$F_m=p$，且模 4 余 1.

由通项计算可得$F_m\mid F_{mn}(m,n\in\mathbf{Z}_+)$，故由$F_m=p$可知$m$为质数或$m\le4$.

………………………..30 分

（1）若m为质数，则$2\nmid m$，$F_m=p$（模 4 余 1）.

又$R_m\equiv(\frac{p-1}{2})!(-1)^{\frac{(p-1)(p+5)}{8}}(\mathrm{mod}\ p)$，故由威尔逊定理可知：

$${R_m}^2\equiv[(\frac{p-1}{2})!]^2\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot(p-1)!\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\equiv-1(\mathrm{mod}\ p)$$

故$R_m\equiv F_{m-1}$或$-F_{m-1}(\mathrm{mod}\,F_m)$，故$R_m=F_{m-1}$或$F_{m-2}$

（2）若$m\le4$，则$F_m=p$的解只有$F_4=3$，$\prod_{k=1}^{F_m-1}k^k=4$，$R_4=1=F_1$，成立.

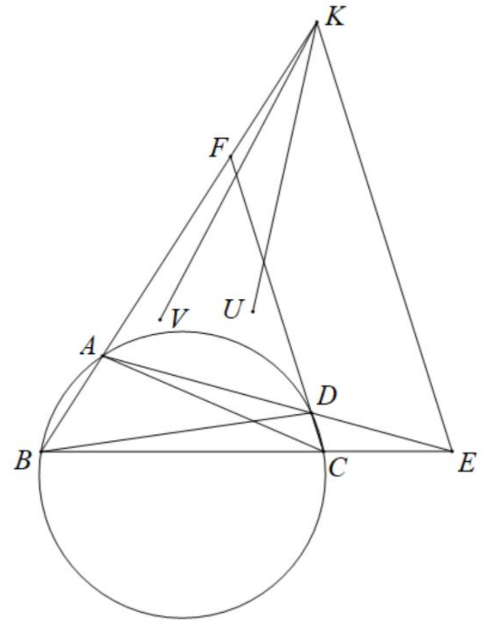
证毕.

………………………..40 分

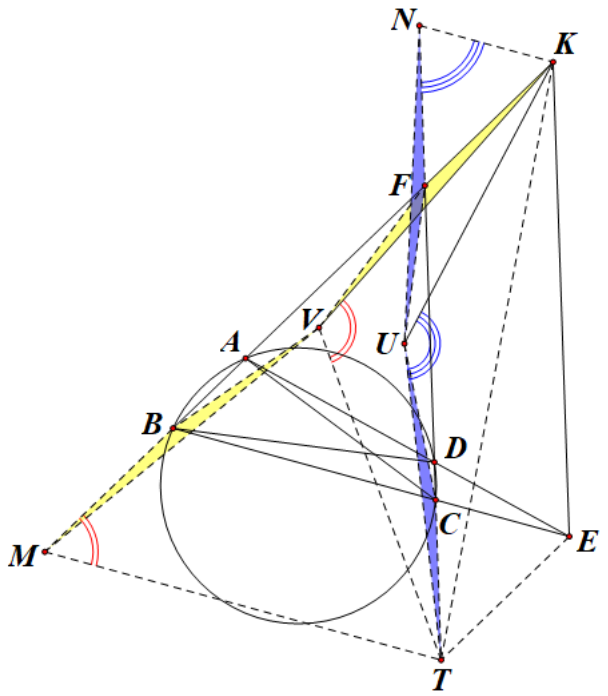
三、（本题满分 50 分）

如图,圆内接四边形 $ABCD$ 中, $BD>AC$, 直线 BC、AD 交于 E,直线 AB、CD 交于 F, 过 E 作直线 CD 的平行线交直线 AB 于 K, U、V 分别为$\triangle FAC$、$\triangle FBD$ 的外心.

证明: $\angle UKV=\angle BCD-\angle ABC$.**（答题时请将图画在答卷纸上）**



证明:方法 1.过 E 作 AB 的平行线与直线 CD 交于 T.



由 $\dfrac{KB\cdot KF}{EB\cdot EC}=\dfrac{FB^2}{BC^2}=\dfrac{FD^2}{DA^2}=\dfrac{TD\cdot TF}{ED\cdot EA}$.

所以 $KB\cdot KF=TD\cdot TF$.

…………………..10 分

所以 K、T 对△BDF 的外接圆的幂相等.
所以 $VK=VT$. 同理 $UK=UT$

……………….....20 分

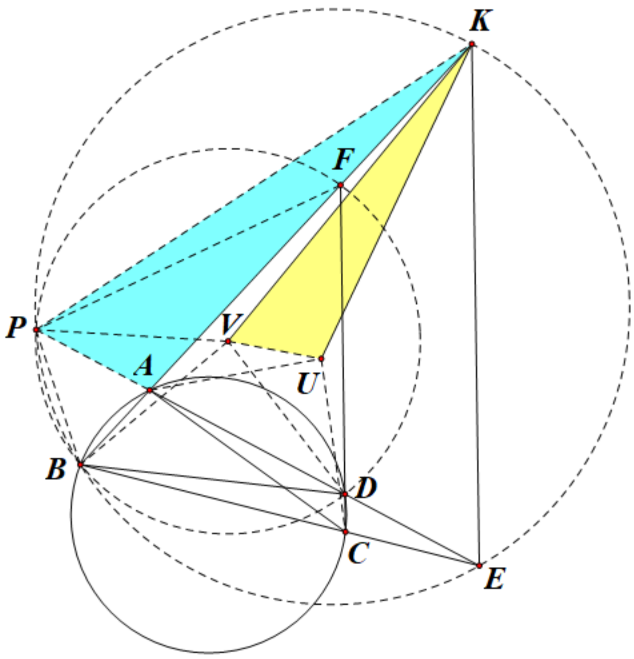
由平行知四边形 $KFTE$ 为平行四边形.
作 K 关于 BF 中点的对称点 M,T 关于 CF 中点的对称点 N.
由对称知 $VM=VK$,$BM=KF=TE$.
所以四边形 $BMTE$ 为平行四边形,V 为△KMT 的外心.

……………………40 分

所以 $MT\parallel BE$.
所以 $\angle KMT=\angle ABC$.
所以 $\angle VKT=90°-\angle KMT=90°-\angle ABC$.
同理,$NK\parallel CE$,U 为△KNT 的外心,$\angle UKT=90°-\angle TNK=90°-\angle BCD$.
所以 $\angle VKU=\angle VKT-\angle UKT=\angle BCD-\angle ABC$.

……………………50 分

方法 2.延长 EA 与△BEK 的外接圆交于 P.



由 $\angle BPD=\angle BPE=\angle BKE=\angle BFD$.
所以 P、B、D、F 四点共圆.

………………..10 分

由 $\angle UAK=90°-\angle ACD$, $\angle VPB=90°-\angle PDB$.
所以 $\angle KPV=\angle KPB-\angle VPB=180°-\angle KEB-\angle VPB=180°-\angle KEB-(90°-\angle PDB)=90°+\angle ACB-\angle DCB=90°-\angle ACD$.
所以 $\angle UAK=\angle KPV$.

………………..20 分

由 $\angle BVD=2\angle BFD=\angle AUC$.

所以等腰△VBD∽等腰△UAC.

………………..30 分

由△EBD∽△EAC,△EBD∽△EAC.

所以 $\dfrac{PV}{AU}=\dfrac{BV}{AU}=\dfrac{BD}{AC}=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{PK}{AK}$.

所以△KPV∽△KAU.

………………..40 分

所以∠PKV=∠AKU.

所以∠VKU=∠AKU−∠AKV=∠PKV−∠AKV=∠PKA=∠AEB=∠BCD−∠CDE=∠BCD−∠ABC.

………………..50 分

四、（本题满分 50 分）

给定正整数$k\geqslant l$．设m为最小的正整数，满足对所有$n\geqslant m$，无论如何将一个n阶完全图的所有边染为红蓝两色之一，都存在一条红色的长为k的路或一条蓝色的长为l的路．证明：$m=k+\left[\dfrac{l+1}{2}\right]$.

注：一条长为t的路由$t+1$个点$U_1,U_2,\ldots,U_{t+1}$构成，满足对任意的$1\leqslant i\leqslant t$，U_i与U_{i+1}之间均有边连接.

证明：一方面，我们给出$n=k+\left[\dfrac{l+1}{2}\right]-1$时的染色方法的构造，满足不存在红色的长为$k$的路或长为$l$的路：先从$n$个点中选出$k$个点，记此$k$个点构成集合$S$．将此$k$个点间两两连线染红，并把剩下的边染蓝．由于只有$k$个点与红色边相邻，故显然红色的路长度不超过$k-1$．下面我们证明蓝色的路长度不超过$l-1$．而对于蓝色的路，注意到路上相邻的点不能都在$S$中，又因为这条路最多经过$S$之外的点$\left[\dfrac{l+1}{2}\right]-1$次，故路长不超过$2\left(\left[\dfrac{l+1}{2}\right]-1\right)\le l-1$.

…………10 分

另一方面，我们说明$m\le k+\left[\dfrac{l+1}{2}\right]$．设$g(k,l)$为一般的$k\ge l$所对应的$m$值．我们对$k$归纳证明对于所有的$l\le k$均有$g(k,l)\le k+\left[\dfrac{l+1}{2}\right]$.

$k=1$时显然．$k\ge 2$时，假设对于小于k的情况均成立，下面证明k时也成立．考虑$k+\left[\frac{l+1}{2}\right]$阶完全图$G$的任意红蓝二染色．由归纳假设，我们只要证明：若红色的路长度最大为$k-1$，则存在一条蓝色的长为l的路.

设最长的红色路为$U_1,U_2,\ldots,U_k$，剩余的点为$V_1,V_2,\ldots V_{\left[\frac{l+1}{2}\right]}$．设集合$U=\{U_1,U_2,\ldots,U_k\}$，$V=\left\{V_1,V_2,\ldots,V_{\left[\frac{l+1}{2}\right]}\right\}$，那么由$U_1,U_2,\ldots,U_k$的最长性容易验证下面三条性质对于任意不越界的下标均成立:

(i) V_iU_j是蓝色的或V_iU_{j+1}是蓝色的,

(ii) V_iU_1与V_iU_k均为蓝色的,

(iii) 对j与两两不同的i_1,i_2,i_3，U_j,U_{j+1}中至少有一个点与V_{i_1},V_{i_2},V_{i_3}中至少两个点均连蓝边.

…………20 分

考虑最长的满足如下性质的蓝色路：不含U_1,U_k；起点与终点均在V中；每相邻的两个点均一个在U中，一个在V中．设这条路为S，起点与终点分别为A,B．若S包含了V中所有的点，那么将S加上U_1A,BU_k，则构成了一条长为$2\left[\frac{l+1}{2}\right]\ge l$的路，满足需求．故以下我们不妨假设$S$没有包含$V$中所有的点．设$W$为$V$中所有不在$S$中的点构成的集合.

再考虑最长的满足如下性质的蓝色路：不含U_1,U_k；不含S中的点；起点与终点均在W中；每相邻的两个点均一个在U中，一个在W中．设这条路为T.

…………30 分

下面我们证明V中所有点均在S或T中．假设有点X在V中，且不在S或T中．那么S与T在V中的点数不超过$\left[\frac{l+1}{2}\right]-1$，故$S$与$T$在$U$中的点数不超过$\left[\frac{l+1}{2}\right]-3<\left[\frac{k-3}{2}\right]=\left[\frac{k-2-1}{2}\right]$个（用到了$l\le k$）．故有下标$i$，$2\le i\le k-2$使得$U_i,U_{i+1}$不在$S$与$T$中．对$A,C,X\in V$与$U_i,U_{i+1}\in U$使用性质(iii)，于是可以将$S$或$T$延长,

与最长性矛盾!

…………40 分

故V中所有点均在S或T中，S与T的长度之和为 $2\left[\frac{l+1}{2}\right]-4$. 将$S$与$T$加入边$U_1A, BU_k, U_kC, DU_1$形成一个长为$2\left[\frac{l+1}{2}\right]$的圈. 当$l$为奇数时，将圈在某处断开即得一个长为$l$的圈. 当$l$为偶数时，注意到$S$与$T$在$U$中的点数不超过$\left[\frac{l+1}{2}\right]-2=\frac{l-4}{2}\le\frac{k-4}{2}$个，故有下标$i$，$2\le i\le k-2$使得$U_i, U_{i+1}$不在$S$与$T$中. 利用性质(i)可得$U_i$或$U_{i+1}$与刚才得到的圈以蓝边相连. 于是将此圈断开可以得到长为l的圈. 归纳证毕.

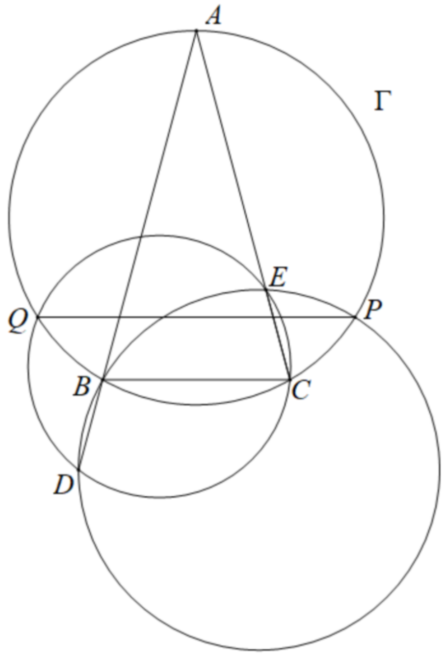
…………50 分

2022年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（二）

考试时间：2022年7月28日下午 14:00 — 16:50

五、（本题满分 40 分）

如图，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D在线段AB的延长线上，E在线段AC上，满足$BD=CE$，记$\triangle ABC$的外接圆为Γ，$\triangle BDE$的外接圆交Γ于另外一点P，$\triangle CDE$的外接圆交Γ于另外一点Q．求证：$PQ/\!/BC$．**（答题时请将图画在答卷纸上）**



六、（本题满分 40 分）

已知n为正整数，$n\geqslant 2$，正实数$b_1,b_2,\cdots,b_n$满足$b_1<b_2<\cdots<b_n$且$b_n=1$．证明:

$$\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k^2}{1-b_{k+1}+b_k}<\sum_{k=1}^{n}b_k^2 .$$

七、（本题满分 50 分）

证明：存在正实数c，使得对任意正整数n与平面上的n个点，这n个点构成的等腰三角形不超过$c\cdot n^{\frac{5}{2}}$个.

八、（本题满分 50 分）

记$a_1,a_2,\cdots,a_{2022}$为 2022 个大于 2022 的不同质数，$A_1,A_2,\cdots,A_{2022}$为数集且$A_i\subseteq\{a_i-i,a_i-i+1,\cdots,a_i-1\}(i=1,2,\cdots,2022)$.

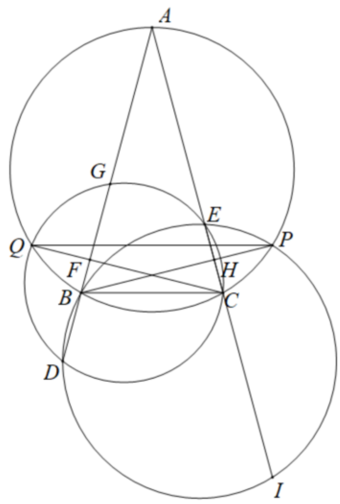
证明：存在$m<\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 4046!}$，使得对$\forall i=1,2,\cdots,2022$，以及$\forall a\in A_i$，有$m\not\equiv a(\operatorname{mod} a_i)$.

2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（二）
考试时间：2022 年 7 月 28 日下午 14:00 — 16:50

五、（本题满分 40 分）

如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 在线段 AB 的延长线上，E 在线段 AC 上，满足 $BD=CE$，记 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，$\triangle BDE$ 的外接圆交 Γ 于另外一点 P，$\triangle CDE$ 的外接圆交 Γ 于另外一点 Q．求证：$PQ /\!/ BC$．

（答题时请将图画在答卷纸上）



证明：设 $AD=x.AE=y$,则 $AB=AC=\frac{x+y}{2},BD=CE=\frac{x-y}{2}$

设 AD 交 CQ 于 F,AD 交 $\triangle CDE$ 的外接圆于另外一点 G

由圆幂定理:$FB\cdot FA=FC\cdot FQ=FD\cdot FG$，

………………..10 分

$$\frac{FA}{FD}=\frac{FG}{FB}=\frac{FA-FG}{FD-FB}=\frac{AG}{BD}=\frac{\frac{AE\cdot AC}{AD}}{BD}=\frac{y(x+y)}{x(x-y)}$$

$$FA=\frac{y(x+y)}{y(x+y)+x(x-y)}AD=\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$$

………………..20 分

设 AC 交 BP 于 H,AE 交 $\triangle BDE$ 的外接圆于另外一点 I

由圆幂定理:$HC\cdot HA=HB\cdot HP=HE\cdot HI$

从而

$$\frac{HA}{HI}=\frac{HE}{HC}=\frac{HA-HE}{HI-HC}=\frac{AE}{CI}=\frac{AE}{AI-AC}=\frac{AE}{\frac{AB\cdot AD}{AE}-AC}=\frac{2y^2}{x^2-y^2}$$

从而 $HA=\frac{2y^2}{2y^2+(x^2-y^2)}AI=\frac{2y^2}{2y^2+(x^2-y^2)}\frac{\frac{x+y}{2}\cdot x}{y}=\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$

………………..30 分

所以$FA=HA$,由圆和等腰三角形的对称性可得$\overset{\frown}{QB}=\overset{\frown}{PC}$.

从而$PQ//BC$.

………………..40 分

六、（本题满分 40 分）

已知n为正整数，$n\geqslant 2$，正实数$b_1,b_2,\cdots,b_n$满足$b_1<b_2<\cdots<b_n$且$b_n=1$. 证明:

$$\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k^2}{1-b_{k+1}+b_k}<\sum_{k=1}^{n}b_k^2 .$$

证明: 由题意, 只要证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k^2}{1-b_{k+1}+b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}b_k^2<\frac{1}{3}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k^2(b_{k+1}-b_k)}{1-b_{k+1}+b_k}<\frac{1}{3}$$

令$a_i=\begin{cases}b_i-b_{i-1},i\geqslant 2\\ b_1,i=1\end{cases}$, 则$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, 且$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$.

只要证明: $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{1-a_{k+1}}\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2<\frac{1}{3}$.

以下为数学归纳法:

(1) 当$n=2$时, 左边为$\frac{a_2}{1-a_2}\cdot a_1^2=a_1a_2\leqslant\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$, 结论成立;

(2) 假设结论对$n=m$成立, 则对于$n=m+1$时,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m}\frac{a_{k+1}}{1-a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2\\&=a_{m+1}(1-a_{m+1})+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_{k+1}}{1-a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2\end{aligned}$$

令$S=a_1+a_2+\cdots+a_m\in(0,1)$, $c_i=\frac{a_i}{S}(1\leqslant i\leqslant m)$, 则

$$S=1-a_{m+1},c_1+c_2+\cdots+c_m=1$$

因此$a_{m+1}\cdot(1-a_{m+1})=S(1-S)$, 以及

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_{k+1}}{1-a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2&=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{Sc_{k+1}}{1-Sc_{k+1}}\cdot S^2(c_1+c_2+\cdots+c_k)^2\\&<S^3\sum_{k=1}^{m-1}\frac{c_{k+1}}{1-c_{k+1}}(c_1+c_2+\cdots+c_k)^2<\frac{1}{3}S^3\end{aligned}$$

……………………….30 分

再结合$S(1-S)+\frac{1}{3}S^3<\frac{1}{3}\Leftrightarrow S^3-3S^2+3S-1<0\Leftrightarrow(S-1)^3<0$, 结论得证.

………………………40 分

七、（本题满分 50 分）

证明：存在正实数 c，使得对任意正整数 n 与平面上的 n 个点，这 n 个点构成的等腰三角形不超过 $c\cdot n^{\frac{5}{2}}$ 个.

证明：我们先说明，在n个点的C_n^2条两两间中垂线中，设有k条线重合，则有$k\le n$：只需注意到若AB的中垂线与CD的中垂线重合，则$\{A,B\}\cap\{C,D\}=\emptyset$或$\{A,B\}=\{C,D\}$即可.

....................10 分

考虑这C_n^2条中垂线. 设它们去重之后为$l_1,l_2,\dots,l_m$，其中l_i重数为c_i，则$c_i\le n(1\le i\le m)$. 设l_i过n个点中x_i个点，则由于两点确定一条直线，故不同l_i上的点对(X,Y)不同，故有$C_{x_1}^2+C_{x_2}^2+\cdots+C_{x_m}^2\le C_n^2$. 即 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2-x_1-x_2-\cdots-x_m\le n(n-1)$，故 $\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(x_m-\frac{1}{2}\right)^2\le n(n-1)+\frac{1}{4}m\le 2n(n-1)$.

.................30 分

所求等腰三角形数不超过$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m$. 由 Cauchy 不等式，$\left(c_1\left(x_1-\frac{1}{2}\right)+c_2\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+\cdots+c_m(x_m-\frac{1}{2})\right)^2\le(c_1^2+c_2^2+\cdots+c_m^2)\left(\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(x_m-\frac{1}{2}\right)^2\right)\le 2n(n-1)(c_1^2+c_2^2+\cdots+c_m^2)\le 2n^2(n-1)(c_1+c_2+\cdots+c_m)\le n^5$.

故$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m\le n^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}(c_1+c_2+\cdots+c_m)<2n^{\frac{5}{2}}$.

.................50 分

八、（本题满分 50 分）

记 $a_1,a_2,\cdots,a_{2022}$ 为 2022 个大于 2022 的不同质数，$A_1,A_2,\cdots,A_{2022}$ 为数集且 $A_i\subseteq\{1,2,\cdots,a_i-1\}(i=1,2,\cdots,2022)$.

证明：存在正整数 $m\le\left(2|A_1|+1\right)\left(2|A_2|+1\right)\cdots\left(2|A_{2022}|+1\right)$，使得对 $\forall i=1,2,\cdots,2022$，以及 $\forall a\in A_i$，有

$m\not\equiv a(\bmod a_i)$.

证明：$\because a_1$，a_2，$\cdots$，a_{2022} 两两互质，由中国剩余定理可知：对 $\forall i=1$，2，$\cdots$，2022，$\exists t_i$ 满足 $t_i\equiv 1(\bmod a_i)$，$t_i\equiv 0(\bmod a_j)(j\ne i)$.

考虑数 $\alpha=\sum_{i=1}^{2022}t_ix_i$，则 $\alpha\equiv x_i(\bmod a_i)$ ………*

…………………10 分

记 $S_i=\{0,1,2,\cdots,a_i-1\}$，设 $B_i\subseteq\{0,1,2,\cdots,a_i-1\}$ 且是满足对 $\forall x$，$y\in B_i$，$\forall z\in A_i$，$x-y\not\equiv z(\bmod a_i)$ 的元素最多的集合，从而对 $\forall t\notin B_i$，$t\in S_i$ 必存在 $u\in B_i$，$v\in A_i$ 使 $\pm(t-u)\equiv v(\bmod a_i)$.

故 $t\equiv u\pm v(\bmod a_i)$，故对 $\forall t\notin B_i$，$t\in S_i$，t 至多有 $2|B_i||A_i|$ 种模 a_i 的余数.

从而 $|B_i|+2|A_i||B_i|\ge a_i$，即 $|B_i|\ge\dfrac{a_i}{2|A_i|+1}$，$i=1$，2，$\cdots$，2022.

…………………30 分

考虑形如*中的数构成的集合 $S=\{\sum_{i=1}^{2022}t_ix_i\mid x_i\in B_i\}$，

则 S 中有 $|B_1||B_2|\cdots|B_{2022}|$ 个不同的数且模 $a_1a_2\cdots a_{2022}$ 的余数在 $[0,a_1a_2\cdots a_{2022}-1]$ 中.

将 $[0,a_1a_2\cdots a_{2022}-1]$ 均匀分为 $\dfrac{a_1a_2\cdots a_{2022}-1}{(2|A_1|+1)(2|A_2|+1)\cdots(2|A_{2022}|+1)}$ 个区间

$\because|B_1||B_2|\cdots|B_{2022}|\ge\dfrac{a_1a_2\cdots a_{2022}-1}{(2|A_1|+1)(2|A_2|+1)\cdots(2|A_{2022}|+1)}$

$\therefore$ 必存在 S 中有两个数位于同一区间，故其差（大减小）$\le(2|A_1|+1)(2|A_2|+1)\cdots(2|A_{2022}|+1)$.

且由 B_i 的定义可知，这两个数之差模 a_i 不与 A_i 中元素同余，记这个正整数为 m

则 $m\le(2|A_1|+1)(2|A_2|+1)\cdots(2|A_{2022}|+1)$

…………………50 分