

班级: _____ 座号: _____ 姓名: _____

(在此卷上答题无效)

福建省厦门第一中学 2022-2023 学年度第二学期 考
高三年数学试卷

满分 150 分 考试时间 120 分钟

一、单选题: 本题 8 小题, 每题 5 分, 共 40 分

1. 设集合 $A = \{x | \log_{0.5}(x-1) > 0\}$, $B = \{x | 2^x < 4\}$, 则

A. $A=B$ B. $A \supseteq B$ C. $A \cap B = B$ D. $A \cup B = B$

2. 设 $b, c \in \mathbb{R}$, 若 $2-i$ (i 为虚数单位) 是一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一个虚根, 则

A. $b=4, c=5$ B. $b=4, c=3$ C. $b=-4, c=5$ D. $b=-4, c=3$

3. “ $b \in (0, 4)$ ”是“ $\forall x \in \mathbb{R}, bx^2 - bx + 1 > 0$ 成立”的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知圆锥的侧面展开图是一个半径为 4, 弧长为 4π 的扇形, 则该圆锥的表面积为

A. 4π B. 8π C. 12π D. 20π

5. 已知 $\omega \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = (x-6)^2 \cdot \sin(\omega x)$, 存在常数 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 可能的值为

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{5}$

6. 在 $\triangle AOB$ 中, 已知 $|\overline{OB}| = \sqrt{2}$, $|\overline{AB}| = 1$, $\angle AOB = 45^\circ$, 若 $\overline{OP} = \lambda \overline{OA} + \mu \overline{OB}$, 且 $\lambda + 2\mu = 2, \mu \in [0, 1]$, 则 \overline{OA} 在 \overline{OP} 上的投影向量为 $m\overline{e}$ (\overline{e} 为与 \overline{OP} 同向的单位向量), 则 m 的取值范围是

A. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

7. 若 $a = \log_{2021} 2022$, $b = \log_{2022} 2023$, $c = \frac{2022}{2021}$, $d = \frac{2023}{2022}$, 则 a, b, c, d 中最大的是

A. a B. b C. c D. d

8. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{4}$, 则椭圆和双曲线的离心率乘积的最小值为

A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2

二、多选题: 本题 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分。全部选对得 5 分, 少选得 2 分, 选错得 0 分。

9. 下列命题中, 正确的命题

A. 回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 恒过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y}) , 且至少过一个样本点

B. 将一组数据的每个数据都加一个相同的常数后, 方差不变

C. 用相关指数 R^2 来刻画回归效果, R^2 越接近 0, 说明模型的拟合效果越好

D. 若随机变量 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$, 且 $P(\xi < 6) = 0.84$, 则 $P(3 < \xi < 6) = 0.34$

第 1 页, 共 4 页

10. 已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的两点, 则下列结论中正确的是
- A. 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ B. 若点 O 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$, 则 $|AB| = 2\sqrt{2}$
- C. 若 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, 则 $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1|$ 的最大值为 4 D. $x_1x_2 + y_1y_2$ 的最小值为 -4

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(1, \sqrt{3})$, 若将点 A 绕原点按顺时针旋转 θ 弧度, 得到点 $B(x_0, y_0)$, 记 $f(\theta) = x_0 + y_0$, $g(\theta) = 2x_0y_0$, 则下列结论错误的有
- A. $f(\theta) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12} - \theta\right)$ B. 不存在 θ , 使得 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 均为整数
- C. $f^2(\theta) - 8g(\theta) = 2$ D. 存在某个区间 $(a, b) (a < b)$, 使得 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 的单调性相同

12. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长均为 $2\sqrt{2}$, E, F 分别是 PC, AB 的中点, M 为棱 PB 上异于 P, B 的一动点, 则以下结论正确的是
- A. 异面直线 EF, PD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ B. 直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$
- C. $\triangle EMF$ 周长的最小值为 $\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$ D. 存在点 M 使得 $PB \perp$ 平面 MEF

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 前三项的系数成等差数列, 则展开式中含 x 项的系数为_____.

14. 若 $3\sin\alpha - \sin\beta = \sqrt{10}, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha =$ _____.

15. 安排高二年级一、二两个班一天的数、语、外、物、体, 一班的化学及二班的政治各六节课. 要求体育课两个班一起上, 但不能排在第一节; 由于选课之故, 一班的化学和二班的政治要安排在同一节; 其他语、数、外、物四科由同一任课教师分班上, 则不同的排课表方法共有_____种.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中给定 a_1 , 且函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a_n \sin x + (a_n + 2)x + 1$ 的导函数有唯一的零点, 函数 $g(x) = 8x + \sin(\pi x) - \cos(\pi x)$ 且 $g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_9) = 18$. 则 $a_1 =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 其中 17 题 10 分, 18-22 题每题 12 分。

17. 设 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 函数 $f(x) = 2\sin(x-A)\cos x + \sin A$.

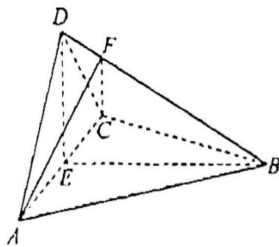
(1) 若 $f(0) = -\frac{1}{2}, a = 3, b = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取最大值, 求 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的值域.

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp CD, AD = CD, \angle ADB = \angle BDC$, E 为 AC 的中点.

(1) 证明: 平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $AB = BD = 2, \angle ACB = 60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.



19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且前四项和为 28, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足

$$2S_n = 3b_n - 3\lambda (\lambda \in R).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并判断 $\{b_n\}$ 是否为等比数列;

(2) 对于集合 A, B , 定义集合 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$. 若 $\lambda = 1$, 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中的所有项分别构成集合 A, B , 将集合 $A - B$ 的所有元素按从小到大依次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 30 项和 T_{30} .

20. 法国数学家庞加莱是个喜欢吃面包的人, 他每天都会到同一家面包店购买一个面包. 该面包店的面包师声称自己所出售的面包的平均质量是 1000g, 上下浮动不超过 50g. 这句话用数学语言来表达就是: 每个面包的质量服从期望为 1000g, 标准差为 50g 的正态分布.

(1) 已知如下结论: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从 X 的取值中随机抽取 k ($k \in N^*, k \geq 2$) 个数据, 记这 k 个数据的平均值为 Y , 则随机变量 $Y \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{k}\right)$. 利用该结论解决下面问题.

(i) 假设面包师的说法是真实的, 随机购买 25 个面包, 记随机购买 25 个面包的平均值为 Y , 求 $P(Y \leq 980)$;

(ii) 庞加莱每天都会将买来的面包称重并记录, 25 天后, 得到的数据都落在 (950, 1050) 上, 并计算 25 个面包质量的平均值为 978.72g. 庞加莱通过分析举报了该面包师, 从概率角度说明庞加莱举报该面包师的理由; 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

(2) 假设有两箱面包 (面包除颜色外, 其他都一样), 已知第一箱中共装有 6 个面包, 其中黑色面包有 2 个; 第二箱中共装有 8 个面包, 其中黑色面包有 3 个. 现随机挑选一箱, 然后从该箱中随机取出 2 个面包. 求取出黑色面包个数的分布列及数学期望.

附: ① 随机变量 η 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq \eta \leq \mu + \sigma) = 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma \leq \eta \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545, P(\mu - 3\sigma \leq \eta \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$;

② 通常把发生概率小于 0.05 的事件称为小概率事件, 小概率事件基本不会发生.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 2. 左右焦点分别为 F_1, F_2 , M 为椭圆 C 上一点, 且 $MF_1 \perp x$ 轴, $|MF_2| = 7|MF_1|$.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 已知直线 $x = ty + m$ ($t \neq 0$ 且 $0 < m < 2$) 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 点 A 关于原点的对称点为 A_1 , 关于 x 轴的对称点为 A_2 , 直线 BA_2 与 x 轴交于点 D , 若 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABA_1$ 的面积相等, 求 m 的值.

22. 已知函数 $f(x) = a(x - \pi)^b - \sin x, x \in [\pi, +\infty)$
- (1) $b = 1$ 时, 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;
- (2) $b = \frac{1}{2}$, $f(x)$ 在 $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ 上有极值点 x_0 , 求证: $f(x_0) + x_0 > \pi$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

