2022～2023 年度河南省高三年级模拟考试

数学参考答案(理科)

1. A　因为 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|x\leqslant -2a\}$，$A\cap B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $-2a=2$，解得 $a=-1$.

2. B　因为 $z=1-\mathrm{i}$，所以 $z^2=-2\mathrm{i}$，则 $|z^2+3-2\mathrm{i}|=|3-4\mathrm{i}|=5$.

3. C　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $2x+4=9x-3$，解得 $x=1$.

4. D　对于 A，$f(x)$ 为非奇非偶函数，故不满足题意.

对于 B，$f(x)$ 为 $(-2,2)$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 为减函数，故不满足题意.

对于 C，因为 $f(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故不满足题意.

对于 D，因为 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，所以 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内单调递增.

又 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，故满足题意.

5. C　圆台的体积 $V=\dfrac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)=\dfrac{1}{3}\times 6\times(3\pi+\sqrt{3\pi\times 12\pi}+12\pi)=42\pi$.

6. B　$x^2(2x-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项为 $x^2\times C_6^4\times(2x)^2\times(-\dfrac{1}{x})^4=60$.

7. A　由题意设此人第一天走 a_1 里，第 n 天走 a_n 里，$\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=100$，由 $S_9=900+36d=1260$，可得 $d=10$，则 $a_3=100+20=120$，$S_n=100n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 10=5n^2+95n$，所以 $S_7=910$，$S_8=1080$.

8. D　因为 $y=\cos(2x+\varphi)=\sin[\dfrac{\pi}{2}+(2x+\varphi)]=\sin(2x+\dfrac{\pi}{2}+\varphi)$，其图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度后对应的函数 $g(x)=\sin[2(x-\dfrac{\pi}{12})+\dfrac{\pi}{2}+\varphi]=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3}+\varphi)$，所以 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，即 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$，则 $2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以单调递减区间为 $[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$.

9. A　依题意得 50 以内的质数有 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，共 15 个数，50 以内的梅森数有 $2^2-1=3$，$2^3-1=7$，$2^5-1=31$，共 3 个数，所以从 50 以内的质数中任取两个数，则这两个数都为梅森数的概率 $P=\dfrac{C_3^2}{C_{15}^2}=\dfrac{1}{35}$，故选 A.

10. D　因为 $MN\perp FN$，所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=|\overrightarrow{FN}|^2=|\overrightarrow{FM}|^2-1$，又 $|\overrightarrow{FM}|\geqslant|\overrightarrow{FO}|=3$，$O$ 为原点，所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}\geqslant 3^2-1=8$.

11. D　两式相减得 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=6$，$a_{2n}+a_{2n+2}=(3^n-1+a_{2n-1})+(3^{n+1}-1+a_{2n+1})=4\times 3^n+4$.

$S_{40}=(a_1+a_3+\cdots+a_{37}+a_{39})+(a_2+a_4+\cdots+a_{38}+a_{40})=6\times 10+4\times 10+4\times(3^1+3^3+\cdots+3^{19})=\dfrac{3^{21}+197}{2}$.

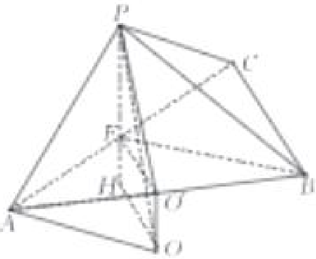
12. B　不等式 $m\mathrm{e}^{mx}\geqslant\ln x$ 恒成立，即 $\mathrm{e}^{mx}\geqslant\dfrac{\ln x}{m}$ 恒成立. 因为曲线 $y=\mathrm{e}^{mx}$ 关于直线 $y=x$ 对称的曲线是 $y=\dfrac{\ln x}{m}$，所以只需 $\dfrac{\ln x}{m}\leqslant x$，即 $m\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$. 令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，$g(x)\leqslant g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $m\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

13. 5　画出可行域(图略)知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $(2,1)$ 时，z 取得最大值 5.

14. $(-\infty,\dfrac{1}{2})$　因为 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $f(3x-1)<$

$f(1-x)$，所以 $3x-1<1-x$，解得 $x<\frac{1}{2}$.

15. 20π　分别取 AB,AC 的中点 O',F，连接 $O'F,O'P,PF,BF$. 由题意可知 O' 为直角三角形 ABC 斜边的中点. 因为 $O'P=\sqrt{2}<O'A$，所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心在平面 ABC 的下方. 设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为 O，连接 OO',OP,OA，作 $OH\perp PF$，垂足为 H. 由题中数据可得 $PF=1,OH=O'F=1,O'A=2,HF=OO'$. 设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，则 $R^2=O'A^2+O'O^2=OH^2+(PF+O'O)^2$，解得 $R^2=5$. 故三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积是 $4\pi R^2=20\pi$.



16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　设 $|F_1F_2|=2c$，$|AF_1|=m$，$|AF_2|=n$（不妨设 $m>n$），椭圆 C_1 的长半轴长为 a_1，双曲线 C_2 的实半轴长为 a_2，则 $\begin{cases}m+n=2a_1,\\m-n=2a_2,\end{cases}$ 所以 $mn=a_1^2-a_2^2$. 在 $\triangle F_1MF_2$ 中，由 $\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{4}$，得 $m^2+n^2-\sqrt{2}mn=4c^2$，整理为 $(m+n)^2-(2+\sqrt{2})mn=4c^2$，所以 $(2-\sqrt{2})a_1^2+(2+\sqrt{2})a_2^2=4c^2$，方程两边同时除以 c^2，得 $\frac{2-\sqrt{2}}{e_1^2}+\frac{2+\sqrt{2}}{e_2^2}=4$. 由基本不等式得 $4=\frac{2-\sqrt{2}}{e_1^2}+\frac{2+\sqrt{2}}{e_2^2}\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{e_1e_2}$，则 $e_1e_2\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $e_1=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$，$e_2=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ 时，等号成立.

17. 解：(1) 因为 $a(\sin A-\sin C)+c\sin C=b\sin B$，

所以 $a(a-c)+c^2=b^2$. ………………………………………… 2 分

整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$，………………………………………… 3 分

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 5 分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 6 分

(2) 由(1)知 $B=\frac{\pi}{3}$，因为 $b=5$，所以 $25=a^2+c^2-2ac\times\frac{1}{2}=(a+c)^2-3ac$. ………………… 8 分

又 $ac\leqslant(\frac{a+c}{2})^2=\frac{(a+c)^2}{4}$，所以 $25\geqslant\frac{(a+c)^2}{4}$. ………………………………………… 10 分

即 $a+c\leqslant10$，当且仅当 $a=c=5$ 时，等号成立. ………………………………………… 11 分

所以 $a+c+b\leqslant15$，即 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 15. ………………………………………… 12 分

18. 解：(1) 设抽取的 3 天生产的零件个数都不高于 39 为事件 A，甲公司记录的 30 天中，有 $5+9=14$ 天生产的零件个数不高于 39. ………………………………………… 2 分

则 $P(A)=\frac{C_{14}^3}{C_{30}^3}=\frac{13}{145}$. ………………………………………… 4 分

(2) 依题意，甲公司员工的日平均生产零件个数为 $38\times\frac{1}{6}+39\times\frac{3}{10}+40\times\frac{1}{6}+41\times\frac{1}{5}+42\times\frac{1}{6}=39.9$，

………………………………………… 5 分

所以甲公司员工的日平均工资为 $140+2\times39.9=219.8$ 元. ………………………………………… 6 分

设乙公司员工一天生产的零件个数为 a，日工资为 X（单位：元），

当 $a=40$ 时，$X=40\times4=160$，

当 $a=41$ 时，$X=41\times4=164$，………………………………………… 7 分

当 $a=42$ 时，$X=42\times4=168$，

当 $a=43$ 时，$X=42\times4+1\times5=173$，………………………………………… 8 分

当 $a=44$ 时，$X=42\times4+2\times5=178$，

所以 X 的所有可能取值为 160，164，168，173，178. ………………………………………… 9 分

故 X 的分布列为

X	160	164	168	173	178
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

………………………………………………………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=160\times\frac{1}{10}+164\times\frac{3}{10}+168\times\frac{1}{5}+173\times\frac{3}{10}+178\times\frac{1}{10}=168.5$.

乙公司员工的日平均工资为 168.5 元. ………………………………………… 11 分

因为 $168.5<219.8$，所以推荐小明去甲公司应聘. ………………………………… 12 分

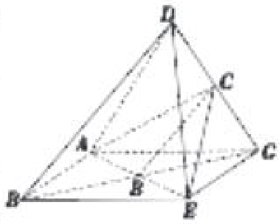
19.(1)证明：连接 BD 交 AC 于点 F，连接 FE. ……………………………… 1 分

因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 F 是 BD 的中点. ………………………………… 2 分

又 E 是 PD 的中点，所以 $EF/\!/PD$. ……………………………………………… 3 分

因为 $EF\subset$ 平面 EAC，$PD\not\subset$ 平面 EAC，

所以 $PB/\!/$ 平面 EAC. ………………………………………………………… 4 分

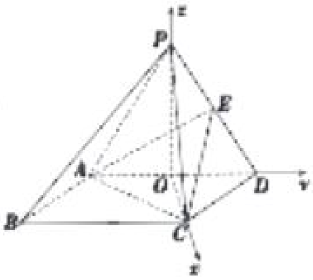


(2)解：取 AD 的中点 O，连接 PO，则 $PO\perp AD$. 因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………… 5 分

又 $PA=PD=3$，$AB=2$，所以 $PO=2\sqrt{2}$.

因为底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，

所以 $OC\perp AD$，且 $OC=\sqrt{3}$. ……………………………………………… 6 分



以 O 为坐标原点，以 OC，OD，OP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},-2,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,0,2\sqrt{2})$，$D(0,1,0)$，$E(0,\frac{1}{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CE}=(-\sqrt{3},\frac{1}{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$.

………………………………………………………………………… 8 分

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=y+2\sqrt{2}z=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}x-y=0.\end{cases}$ ……………………………………………… 9 分

令 $x=4$，得 $\boldsymbol{n}=(4,4\sqrt{3},-\sqrt{6})$. ……………………………………… 10 分

则 $|\cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CE}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{10}}{35}$. ………………………………………… 11 分

故直线 EC 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{10}}{35}$. ………………………… 12 分

20.解：(1)由题意得 $c=2$. ………………………………………………………… 1 分

将点 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 的坐标代入方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{2}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1$. ………………………… 2 分

又因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $\frac{2}{4-b^2}-\frac{3}{b^2}=1$，整理得 $b^4+b^2-12=0$，解得 $b^2=3$. …………… 4 分

所以 $a^2=1$，双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………… 5 分

(2)假设存在 $P(n,0)$ 满足条件，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由题意知，直线 AB 的斜率不为 0，设直线 AB：$x=my+2$.

联立 $\begin{cases}x=my+2,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$. …………………… 6 分

则 $3m^2-1\neq0$，$\Delta=(12m)^2-4\times9\times(3m^2-1)=36(m^2+1)>0$，

且 $y_1+y_2=-\dfrac{12m}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{9}{3m^2-1}$. …………………… 7分

因为点 F 到直线 PA，PB 的距离始终相等，所以 PF 是 $\angle APB$ 的角平分线. …………………… 8分

则 $k_{PA}+k_{PB}=0$，即 $\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}=0$，所以 $y_1(my_2+2-n)+y_2(my_1+2-n)=0$.

整理得 $2my_1y_2+(2-n)(y_1+y_2)=0$. …………………… 9分

所以 $\dfrac{2m\times9}{3m^2-1}-\dfrac{(2-n)\times12m}{3m^2-1}=0$，整理得 $m(2n-1)=0$. …………………… 10分

因为对于任意的 $m\neq\pm\dfrac{\sqrt3}{3}$，$m(2n-1)=0$ 恒成立，所以 $n=\dfrac12$.

故存在点 $P(\dfrac12,0)$，使得点 F 到直线 PA，PB 的距离始终相等. …………………… 12分

21. 证明：(1) $f'(x)=ae^{ax}-ax-1$. …………………… 1分

设 $g(x)=ae^{ax}-ax-1$，$g'(x)=a^2e^{ax}-a=a^2(e^{ax}-\dfrac1a)$. …………………… 2分

因为 $a\geqslant1$，$x\geqslant0$，所以 $e^{ax}\geqslant1$，$\dfrac1a\leqslant1$，所以 $e^{ax}-\dfrac1a\geqslant0$.

所以 $f'(x)$ 在$[0,+\infty)$上是增函数. …………………… 3分

所以 $f'(x)\geqslant f'(0)=a-1\geqslant0$，则 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上是增函数. …………………… 4分

又 $f(0)=0$，所以 $f(x)\geqslant0$. …………………… 5分

(2) 由(1)知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在$[0,+\infty)$上是增函数，且 $f(0)=0$，

所以 $e^x-\dfrac12x^2-x-1\geqslant0$. …………………… 6分

即 $e^x\geqslant\dfrac12x^2+x+1=\dfrac{x^2+2x+2}{2}>\dfrac{(x+1)^2}{2}$. …………………… 8分

所以 $x>2\ln(x+1)-\ln2$. …………………… 9分

设 $x=\dfrac1n$，得 $\dfrac1n>2\ln\dfrac{n+1}{n}-\ln2=2\ln(n+1)-2\ln n-\ln2$. …………………… 10分

所以 $1>2\ln2-\ln2$，

$\dfrac12>2\ln3-2\ln2-\ln2$，

$\dfrac13>2\ln4-2\ln3-\ln2$，

…

$\dfrac1n>2\ln(n+1)-2\ln n-\ln2$.

所以 $1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac1n>2\ln(n+1)-n\ln2$，即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac1k>2\ln(n+1)-n\ln2$ …………………… 12分

22. 解：(1) 消去参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt3+\sqrt3t,\\y=2+t\end{cases}$ 中的参数，得 $x-\sqrt3y+\sqrt3=0$. …………………… 2分

曲线 C 的极坐标方程 $\rho-\dfrac5\rho=4\sin\theta$ 可化为 $\rho^2-5=4\rho\sin\theta$. …………………… 3分

因为 $\rho^2=x^2+y^2$，$y=\rho\sin\theta$，所以 $x^2+y^2-4y-5=0$，即曲线 C 的方程为 $x^2+(y-2)^2=9$. …………………… 5分

(2) 由(1)得点 $A(0,1)$ 在圆 C 内，且 l 的斜率为 $\dfrac{\sqrt3}{3}$，所以可设 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt3}{2}t,\\y=1+\dfrac12t\end{cases}$ (t 为参数). …………………… 6分

代入圆 $C: x^2+(y-2)^2=9$，得 $t^2-t-8=0$。 …… 7分

设点 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=1, t_1t_2=-8$。 …… 8分

所以 $\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|AN|^2}=\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}=\frac{t_1^2+t_2^2}{t_1^2t_2^2}=\frac{(t_1+t_2)^2-2t_1t_2}{t_1^2t_2^2}=\frac{17}{64}$. …… 10分

23.(1)解：由 $f(x)=|3x+1|-|2x-3|$，得 $f(x)=\begin{cases}-x-4, x<-\frac{1}{3},\\ 5x-2, -\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{3}{2},\\ x+4, x\geqslant\frac{3}{2}.\end{cases}$ …… 2分

所以 $f(x)\leqslant 1$ 等价于 $\begin{cases}-x-4\leqslant 1,\\ x<-\frac{1}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}5x-2\leqslant 1,\\ -\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+4\leqslant 1,\\ x\geqslant\frac{3}{2}.\end{cases}$ …… 3分

解得 $-5\leqslant x\leqslant\frac{3}{5}$，即不等式 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $(-5,\frac{3}{5})$. …… 5分

(2)证明：要证 $f(x)+4a+b\geqslant|x-\frac{3}{2}|+\frac{7}{2}$，只需证 $4a+b-\frac{7}{2}\geqslant|2x-3|+|x-\frac{3}{2}|-|3x+1|$，

只需证 $4a+b-\frac{7}{2}\geqslant|3x-\frac{9}{2}|-|3x+1|$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 及任意的正数 a,b 都成立. …… 6分

因为正数 a,b 满足 $a+b=ab$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，

所以 $4a+b=(4a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当 $\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\ b=3\end{cases}$ 时，等号成立，所以 $4a+b-\frac{7}{2}\geqslant 9-\frac{7}{2}=\frac{11}{2}$. …… 8分

又因为 $|3x-\frac{9}{2}|-|3x+1|\leqslant|3x-\frac{9}{2}-3x-1|=\frac{11}{2}$, …… 9分

所以 $4a+b-\frac{7}{2}\geqslant\frac{11}{2}\geqslant|3x-\frac{9}{2}|-|3x+1|$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 及任意的正数 a,b 都成立，

即对任意的 $x\in\mathbf{R}$，任意的正数 a,b，$f(x)+4a+b\geqslant|x-\frac{3}{2}|+\frac{7}{2}$ 恒成立. …… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线