

邯郸市 2023 届高三年级保温试题

数 学

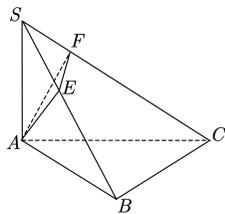
注意事项：

1. 答卷前，考试务必将自己的姓名、准考证号等信息填写在答题卡指定位置上。

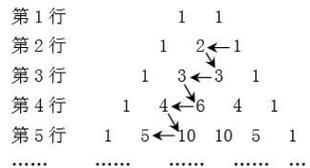
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$ ， $B = \{x \mid |x-1| \geq 1\}$ ，则 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B =$
- A. $\{1\}$ B. $\{-1, 2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{-1, 2, 4\}$
2. 已知等腰梯形 $ABCD$ 满足 $AB \parallel CD$ ， AC 与 BD 交于点 P ，且 $AB = 2CD = 2BC$ ，则下列结论错误的是
- A. $\overline{AP} = 2\overline{PC}$ B. $|\overline{AP}| = 2|\overline{PD}|$
- C. $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AB}$ D. $\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{AB}$
3. 已知抛物线 $M: y^2 = 16x$ 的焦点为 F ，倾斜角为 60° 的直线 l 过点 F 交 M 于 A, B 两点（ A 在第一象限）， O 为坐标原点，过点 B 作 x 轴的平行线，交直线 AO 于点 D ，则点 D 的横坐标为
- A. -8 B. -4 C. -2 D. -1
4. 某医院安排 3 名男医生和 2 名女医生去甲、乙、丙三所医院支援，每所医院安排一到两名医生，其中甲医院要求至少安排一名女医生，则不同的安排方法有
- A. 18 种 B. 30 种 C. 54 种 D. 66 种
5. 三棱锥 $S-ABC$ 中， $SA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp BC$ ， $SA = AB = BC$ 。过点 A 分别作 $AE \perp SB$ ， $AF \perp SC$ 交 SB 、 SC 于点 E 、 F ，记三棱锥 $S-FAE$ 的外接球表面积为 S_1 ，三棱锥 $S-ABC$ 的外接球表面积为 S_2 ，则 $\frac{S_1}{S_2} =$
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
6. 在平面直角坐标系内，已知 $A(-3, 4)$ ， $B(-3, 1)$ ，动点 $P(x, y)$ 满足 $|PA| = 2|PB|$ ，则 $(x-1)^2 + (y-t)^2$ ($t \in \mathbf{R}$) 的最小值是
- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 4 D. 16



7. 如图, 在“杨辉三角”中从第 2 行右边的 1 开始按箭头所指的数依次构成一个数列: 1, 2, 3, 3, 6, 4, 10, 5, ..., 则此数列的前 30 项的和为



- A. 680 B. 679
 C. 816 D. 815

8. 已知函数 $f(x) = \sin 2\pi x - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\pi x\right) - ax$ ($a \in \mathbf{R}$) 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上有两个极值点 x_1 和 x_2 , 则 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 的范围为

- A. $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ B. $\left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ C. $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复平面内复数 z_1 对应向量 $\overrightarrow{OZ_1} = (1, -\sqrt{3})$, 复数 z_2 满足 $|z_2| = 2$, \bar{z}_1 是 z_1 的共轭复数, 则

- A. $|z_1| = |\overrightarrow{OZ_1}|$ B. $\overline{z_1^2} = (\bar{z}_1)^2$ C. $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 4$ D. $|z_1 z_2| = 4$

10. 已知曲线 $C: \frac{x^2}{4-m} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 为曲线 C 上一动点, 则下列叙述正确的是

- A. 若 $m=3$, 则曲线 C 的焦点坐标分别为 $(-\sqrt{2}, 0)$ 和 $(\sqrt{2}, 0)$
 B. 若 $m=1$, 则 $\triangle PF_1 F_2$ 的内切圆半径的最大值为 $\sqrt{6} - 2$
 C. 若曲线 C 是双曲线, 且一条渐近线倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $m = -2$
 D. 若曲线 C 的离心率 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 则 $m = -2$ 或 $m = 6$

11. 已知三棱锥 $P-ABC$, 过顶点 B 的平面 α 分别交棱 PA, PC 于 M, N (均不与棱端点重合). 设

$$r_1 = \frac{PM}{PA}, r_2 = \frac{PN}{PC}, r_3 = \frac{S_{\triangle PNM}}{S_{\triangle PAC}}, r_4 = \frac{V_{P-BNM}}{V_{P-ABC}}$$

其中 $S_{\triangle PNM}$ 和 $S_{\triangle PAC}$ 分别表示 $\triangle PMN$ 和 $\triangle PAC$ 的面积, V_{P-BNM} 和 V_{P-ABC} 分别表示三棱锥 $P-BNM$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积. 下列关系式一定成立的是

- A. $r_3 = r_1 r_2$ B. $2r_3 < r_1^2 + r_2^2$ C. $r_4 < r_1 + r_2$ D. $1 + r_4 > r_1 + r_2$

12. 为了估计一批产品的不合格品率 p , 现从这批产品中随机抽取一个样本容量为 n 的样本

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, 定义 $\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次不合格} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次合格} \end{cases}, i=1, 2, \dots, n$, 于是 $P(\xi_i = 1) = p, P(\xi_i = 0) = 1 - p$,

$i=1, 2, \dots, n$, 记 $L(p) = P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n)$ (其中 $x_i = 0$ 或 $1, i=1, 2, \dots, n$), 称 $L(p)$ 表示 p 为参数的似然函数. 极大似然估计法是建立在极大似然原理基础上的一个统计方法, 极大似然原理的直观想法是: 一个随机试验如有若干个可能的结果 A, B, C, \dots , 若在一次试验中, 结果 A 出现, 则一般认为试验条件对 A 出现有利, 也即 A 出现的概率很大.

极大似然估计是一种用给定观察数据来评估模型参数的统计方法，即“模型已定，参数未知”，通过若干次试验，观察其结果，利用试验结果得到某个参数值能够使样本出现的概率为最大。根据以上原理，下面说法正确的是

A. 有外形完全相同的两个箱子，甲箱有 99 个白球 1 个黑球，乙箱有 1 个白球 99 个黑球。今随机地抽取一箱，再从取出的一箱中抽取一球，结果取得白球，那么该球一定是从甲箱子中抽出的

B. 一个池塘里面有鲤鱼和草鱼，打捞了 100 条鱼，其中鲤鱼 80 条，草鱼 20 条，那么推测鲤鱼和草鱼的比例为 4:1 时，出现 80 条鲤鱼、20 条草鱼的概率是最大的

C. $L(p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$ ($x_i = 0$ 或 $1, i = 1, 2, \dots, n$)

D. $L(p)$ 达到极大值时，参数 p 的极大似然估计值为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = x^2(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是奇函数，则 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $b = a \tan B$ ， $3 \sin A + \sin B = \sqrt{10}$ ，则 $\cos 2B = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意 $n \geq 2$ ，均有 $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + n$ 。若 $a_1 = a_2 = 2$ ，则 $a_{2023} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. 若曲线 $y = e^x$ 与圆 $(x-a)^2 + y^2 = 2$ 有三条公切线，则 a 的取值范围是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$ ，

$c = 2\sqrt{3}$.

(1) 若 $B = \frac{\pi}{4}$ ，求 a ；

(2) D 为 AB 上一点，从下列条件①、条件②中任选一个作为已知，求线段 CD 的最大值。

条件①： CD 为 $\angle C$ 的角平分线； 条件②： CD 为边 AB 上的中线。

注：若选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分。

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 3S_n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$)。

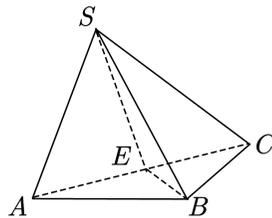
(1) 求 $\{a_n\}$ 通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ ，在数列 $\{b_n\}$ 中是否存在三项 b_m, b_k, b_p (其中 $2k = m + p$) 成等比数列？

若存在，求出这三项；若不存在，说明理由。

19. (本小题满分 12 分)

如图, 三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$, E 为 AC 中点, 且 $\triangle SEB$ 的面积为 $\sqrt{2}$, $AB=BC$, $\angle ABC=90^\circ$, $AC \perp SB$.



(1) 求顶点 S 到底面 ABC 的距离;

(2) 若 $\angle SAB = \angle SCB = 90^\circ$, 求平面 SAC 与平面 SBC 夹角的余弦值.

20. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 C 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴, y 轴, 且过 $A(2,0), B(4,3)$ 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 已知点 $P(2,1)$, 设过点 P 的直线 l 交 C 于 M, N 两点, 直线 AM, AN 分别与 y 轴交于点 G, H , 当 $|GH|=6$ 时, 求直线 l 的斜率.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx - x \ln x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增, 求实数 m 取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_1 x_2 < 1$.

22. (本小题满分 12 分)

邯郸是历史文化名城, 被誉为“中国成语典故之都”. 为了让广大市民更好的了解并传承成语文化, 当地文旅局拟举办猜成语大赛. 比赛共设置 n 道题, 参加比赛的选手从第一题开始答题, 一旦答错则停止答题, 否则继续, 直到答完所有题目. 设某选手答对每道题的概率均为 p ($0 < p < 1$), 各题回答正确与否相互之间没有影响.

(1) 记答题结束时答题个数为 X , 当 $n=3$ 时, 若 $E(X) > 1.75$, 求 p 的取值范围;

(2) (i) 记答题结束时答对个数为 Y , 求 $E(Y)$;

(ii) 当 $p = \frac{5}{6}$ 时, 求使 $E(Y) > 4$ 的 n 的最小值.

参考数据: $\lg 2 \approx 0.301$, $\lg 3 \approx 0.477$.