

准考证号 _____ 姓名 _____
(在此卷上答题无效)

漳州市 2023 届高三毕业班第三次质量检测

数学试题

本试题卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。

3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, $B = \{x | |x - 3| < 2\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(-2, 5)$ B. $(-2, 4)$ C. $(1, 4)$ D. $(-2, 1)$

2. 已知复数 $\bar{z}$ 为复数 z 的共轭复数, 且满足 $z = \bar{z}^2$, z 在复平面内对应的点在第二象限, 则 $|z| =$

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 为递减的等比数列, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $a_2 a_7 = 32$, $a_3 + a_6 = 18$, 则 $\{a_n\}$ 的公比为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$ C. $2^{\frac{3}{5}}$ D. 2

4. 英国物理学家和数学家牛顿曾提出物体在常温环境下温度变化的冷却模型. 如果物体的初始温度是 θ_1 , 环境温度是 θ_0 , 则经过 t min 物体的温度 θ 将满足 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$, 其中 k 是一个随着物体与空气的接触情况而定的正常数. 现有 90°C 的物体, 若放在 10°C 的空气中冷却, 经过 10 min 物体的温度为 50°C , 则若使物体的温度为 20°C , 需要冷却

- A. 17.5 min B. 25.5 min
C. 30 min D. 32.5 min

5. 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{5\pi}{6}\right) =$

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F_1 , 直线 $y = kx (k > 0)$ 与双曲线 C 交于 P ,

Q 两点, 且 $\angle PF_1Q = \frac{2\pi}{3}$, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{F_1Q} = 4$, 则当 $\frac{1}{2}a^2 + \frac{b^2}{a^2}$ 取得最小值时, 双曲线 C 的离心率为

- A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$

漳州市 2023 届高三毕业班第三次质量检测数学试题 第 1 页 (共 4 页)

7. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面与底面所成的二面角为 $\frac{\pi}{3}$, 侧棱 $PA = \frac{\sqrt{21}}{2}$, 则该正三棱锥的外接球表面积

- A. $\frac{13\pi}{4}$ B. $\frac{7\pi}{12}$ C. $\frac{19\pi}{4}$ D. $\frac{19\pi}{12}$

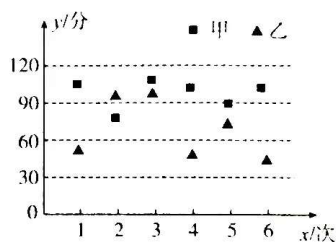
8. 已知函数 $f(x) = (2x + \ln x + 1 - a)$ 和函数 $g(x) = x - \frac{a}{e^x}$ 具有相同的零点 x , 则 $e^{2+\ln x}$ 的值为

- A. e^2 B. $-e$
C. -1 D. e^2

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知福建某地区甲、乙两所高中学校的六次联合模拟考试的数学平均分(满分 150 分)的统计如图所示, 则

- A. 甲校的平均分均高于乙校的平均分
B. 甲校六次平均分的方差小于乙校六次平均分的方差
C. 甲校六次平均分第 25 百分位数小于乙校六次平均分的第 75 百分位数
D. 甲校的平均分极差小于乙校的平均分极差



10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为线段 B_1C 上的动点, 则

- A. $AP \perp$ 平面 A_1C_1D B. $B_1D \perp$ 平面 ACD_1
C. 三棱锥 C_1-PDA_1 的体积为定值 D. 直线 AP 与 A_1D 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

11. 已知函数 $f(x) = \sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} + \cos^2 \frac{\omega x}{2} - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 条对称轴, 则

- A. $\omega \in \left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right)$ B. π 可能是 $f(x)$ 的最小正周期
C. 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}\right)$ 上单调递增 D. 函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上可能有 3 个或 4 个零点

12. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, 且满足 $a_{n+1}a_n^2 = a_n - a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则

- A. $a_1 + a_2 = \frac{19}{20}$ B. a_n 的最大值为 1
C. $a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ D. $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{35}} > 10$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 且 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) =$.

14. $(x^2 + 2y + 2)^2$ 的展开式中 x^4y^2 项的系数为 .

15. 已知 $\triangle ABC$, 点 D 满足 $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$, 点 E 为线段 CD 上异于 C, D 的动点, 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda^2 + \mu^2$ 的取值范围是 .

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, P, Q 为 C 上的两个动点, 且直线 OP 与 OQ 斜率之积为 $-\frac{1}{4}$ (O 为坐标原点), 则椭圆 C 的短轴长为 $\frac{4}{3}$, $|OP|^2 + |OQ|^2 = \frac{16}{3}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $n \in \mathbb{N}^+$, $3a_2 - a_3 = 6$, $S_5 = 54$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $\frac{(n+3)b_n}{2} = \frac{1}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

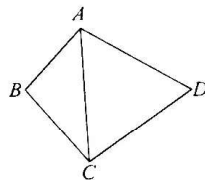
18. (12 分)

如图, 平面四边形 $ABCD$ 内接于圆 O , 内角 $B > D$, 对角线 AC 的长为 7,

圆 O 的半径为 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

(I) 若 $BC = 5$, $AD = CD$, 求四边形 $ABCD$ 的面积;

(II) 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.



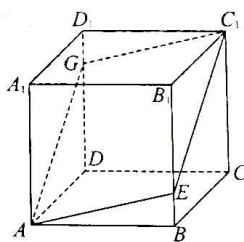
19. (12 分)

如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,

$DD_1 = 3$, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, G 为棱 DD_1 上一点, $DG = 2$, 过 A, G, C_1 三点的平面 α 交 BB_1 于点 E .

(I) 求点 D 到平面 BC_1G 的距离;

(II) 求平面 AEC 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值.



20. (12 分)

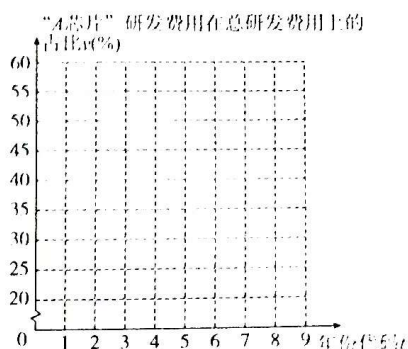
2022 年 11 月 17 日, 由工业和信息化部、安徽省人民政府共同主办的第十七届“中国芯”集成电路产业大会在合肥成功举办. 此次大会以“强芯固基以质为本”为主题, 旨在培育壮大我国集成电路产业、夯实产业基础、营造良好产业生态. 2022 年, 全国芯片研发单位相比 2006 年增加 194 家, 提交芯片数量增加 299 个, 均增长超过 6 倍. 某芯片研发单位用在“A 芯片”上研发费用占本单位总研发费用的百分比 $y(\%)$ 如表所示.

年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码 t	1	2	3	4	5	6	7
$y\%$	20%	30%	32%	39%	42%	46%	50%

(I) 根据表中的数据, 作出相应的折线图; 并结合相关数据, 计算相关系数 r , 并推断 y 与 t 线性相关程度; (已知: $0.8 < |r| \leq 1$, 则认为 y 与 t 线性相关很强; $0.3 < |r| \leq 0.8$, 则认为 y 与 t 线性相关一般; $|r| \leq 0.3$, 则认为 y 与 t 线性相关较弱)

(II) 求出 y 与 t 的回归直线方程(保留一位小数);

(III) 请判断, 若 2024 年用在“A 芯片”上研发费用不低于 295 万元, 则该单位 2024 年芯片研发的总费用预算为 500 万元是否符合研发要求?



附: 相关数据: $\sum_{i=1}^7 y_i = 259$, $\sqrt{7} \approx 2.65$, $\sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} \approx 25.34$, $\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = 132$.

相关计算公式: ① 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$;

② 在回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}t + \hat{a}$ 中, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}$.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = ax - e^x + \frac{\ln x}{a}$ ($a > 0$).

(I) 证明: 当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上不是单调函数;

(II) 证明: 当 $a \in (0, e)$ 时, $f(x) < 0$ 对任意的 $x \in (0, 1)$ 恒成立.

22. (12 分)

已知椭圆 C 的中心为坐标原点 O , 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且点 $(\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ 和点 $(\sqrt{6}, 2)$ 在椭圆 C 上, 椭圆的左顶点与抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 的距离为 4.

(I) 求椭圆 C 和抛物线 Γ 的方程;

(II) 直线 $l: y = kx + m$ ($k \neq 0$) 与抛物线 Γ 交于 P, Q 两点, 与椭圆 C 交于 M, N 两点.

(i) 若 $m = k$, 抛物线 Γ 在点 P, Q 处的切线交于点 S , 求证: $|PF| \cdot |SQ|^2 = |QF| \cdot |SP|^2$;

(ii) 若 $m = -2k$, 是否存在定点 $T(x_0, 0)$, 使得直线 MT, NT 的倾斜角互补? 若存在, 求出 x_0 的值; 若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线