高二考试数学试卷参考答案

1. A　因为 $M=\{x|-5<x<1\}$，所以 $M\cap N=\{x|-3<x<1\}$.

2. D　因为 $0<a<1<b$，所以 $a+b>1$.

3. A　因为 $\begin{cases}a_1+a_3=10,\\a_5+a_7=26,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2a_1+2d=10,\\2a_1+10d=26,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=3,\\d=2,\end{cases}$ 故 $S_7=7a_1+\frac{7\times6}{2}d=63$.

4. C　$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因为 $f(-x)=\frac{(-x)^3\cdot\ln|-x|}{e^{|-x|}}=-\frac{x^3\cdot\ln|x|}{e^{|x|}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，排除 A，D. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，排除 B，故选 C.

5. D　由题意可得 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\geqslant2,\\a<0,\\4a+1\leqslant\frac{a}{2},\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant-\frac{2}{7}$.

6. B　因为 $|x|\geqslant0$，所以 $a=|x|+x^2=(|x|+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\geqslant0$. 故“$a\geqslant-\frac{1}{4}$”是“方程 $|x|+x^2=a$ 有实数解”的必要不充分条件.

7. A　对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数. 因为 $xf(x)\geqslant0$，所以 $x=0$ 或 $\begin{cases}x>0,\\f(x)\geqslant0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x\leqslant1$.

8. D　设切点为 (x_0,y_0)，由题意得 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $k=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}=\frac{y_0-b}{x_0}=\frac{\frac{\ln x_0}{x_0}-b}{x_0}$，整理得 $b=\frac{2\ln x_0-1}{x_0}$，此方程有两个不等的实根. 令函数 $f(x)=\frac{2\ln x-1}{x}$，则 $f'(x)=\frac{3-2\ln x}{x^2}$.
当 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$f'(x)<0$，且 $f(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{3}{2}})$ 上单调递增，在 $[e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递减. $f(x)_{极大值}=f(e^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$. 故 $b\in(0,\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}})$.

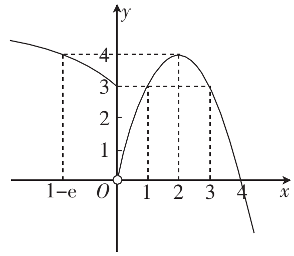
9. BCD　当 $x=2,y=1$ 时，$\frac{1}{2}<1$，A 错误. 函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，B 正确. 函数 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，C 正确. 函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，D 正确.

10. AC　$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2ax^2+bx+1}{x}$. 由题意可得方程 $2ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的正根 x_1,x_2，所以 $\begin{cases}\Delta=b^2-8a>0,\\x_1+x_2=-\frac{b}{2a}>0,\\x_1x_2=\frac{1}{2a}>0,\end{cases}$ 故 $a>0,b<0,b^2-8a>0$，A，C 正确.

11. BCD　$ab=\log_2 3$，A 错误. 因为 $a=\log_2 \mathrm{e}<\log_2 2.8<\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，$b=\ln 3<\ln(2.25)^{\frac{3}{2}}<\ln \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，所以 $a+b<3$，B 正确. $b-\frac{1}{a}=\ln 3-\ln 2=\ln \frac{3}{2}<\frac{1}{2}$，C 正确. $\frac{b}{a}=\ln 3\times\ln 2<(\frac{\ln 3+\ln 2}{2})^2=(\frac{\ln 6}{2})^2<(\frac{\ln \mathrm{e}^2}{2})^2=1$，D 正确.

12. ABD　令 $f(x)=4$，解得 $x=1-\mathrm{e}$ 或 2；

令 $f(x)=3$，解得 $x=0$ 或 1 或 3.



根据函数图象的平移变换，可画出 $f(x)$ 的简图，如图所示.

令 $g(x)=0$，则 $f(f(x))=m$.

令 $f(x)=t$，则 $f(t)=m$.

当 $m>4$ 时，$f(t)=m$ 只有 1 解，且 $t<1-\mathrm{e}$，此时 $f(x)=t$ 只有 1 解，所以 $g(x)$ 只有 1 个零点.

当 $m=4$ 时，$f(t)=4$ 有 2 解，即 $t=1-\mathrm{e}$ 或 2.

$f(x)=1-\mathrm{e}$ 有 1 解；$f(x)=2$ 有 2 解. 所以 $g(x)$ 有 3 个零点.

当 $m\in(3,4)$ 时，$f(t)=m$ 有 3 解 t_1,t_2,t_3，$t_1\in(1-\mathrm{e},0)$，$t_2\in(1,2)$，$t_3\in(2,3)$. 当 $t_1\in(1-\mathrm{e},0)$ 时，$f(x)=t_1$ 只有 1 解；当 $t_2\in(1,2)$ 时，$f(x)=t_2$ 有 2 解；当 $t_3\in(2,3)$ 时，$f(x)=t_3$ 有 2 解. 所以 $g(x)$ 有 5 个零点.

当 $m=3$ 时，$f(t)=3$ 有 3 解，即 $t=0$ 或 1 或 3. $f(x)=0$ 只有 1 解；$f(x)=1$ 有 2 解；$f(x)=3$ 有 3 解. 所以 $g(x)$ 有 6 个零点.

当 $m\in(0,3)$ 时，$f(t)=m$ 有 2 解 t_4,t_5，$t_4\in(0,1)$，$t_5\in(3,4)$. 当 $t_4\in(0,1)$ 时，$f(x)=t_4$ 有 2 解；当 $t_5\in(3,4)$ 时，$f(x)=t_5$ 有 3 解. 所以 $g(x)$ 有 5 个零点.

当 $m=0$ 时，$f(t)=0$ 只有 1 解 $t=4$，$f(x)=4$ 有 2 解，所以 $g(x)$ 有 2 个零点.

当 $m<0$ 时，$f(t)=m$ 只有 1 解，且 $t>4$，此时 $f(x)=t$ 只有 1 解，所以 $g(x)$ 只有 1 个零点.

综上，A，B，D 正确.

13. 3　由 $m^2-\frac{7}{2}m+\frac{5}{2}=1$，解得 $m=3$ 或 $\frac{1}{2}$（舍去）.

14. $(1,2)$　由题意可得 $\begin{cases}1<x+1<3,\\ x-1>0,\end{cases}$ 解得 $1<x<2$.

15. 2023　由题意，设整体为 1，较大部分为 x，则较小部分为 $1-x$，则 $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$，即 $x^2+x-1=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ 舍去），故黄金分割数为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

令 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $q^2+q-1=0$，即 $a_n(q^2+q-1)=0$，所以 $a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=0$，故 $a_{2023}=a_{2024}+a_{2025}=2023$.

16. 4　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1<x_2$，$y_1>y_2$. 由 $|AB|=\sqrt{2}$ 可得 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=$

2. 又因为 AB 所在直线的斜率为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，所以 $x_2-x_1=y_1-y_2=1$. 因为 $\begin{cases}y_1=2^{x_1}+1,\\ y_2=2^{x_2-2}+1,\end{cases}$ 所以 $y_1-y_2=(2^{x_1}+1)-(2^{x_2-2}+1)=1$，即 $2^{x_1}-2^{x_1-1}=1$，解得 $x_1=1$. 因为 $y_1=2^{x_1}+1=3$，所以 $A(1,3)$，代入函数 $y=-x+m$，可得 $m=4$.

17. 解：(1)因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$. ………………………… 2 分

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=e^{-x}+1=-f(x)$，则 $f(x)=-e^{-x}-1$. ………………… 4 分

故 $f(x)=\begin{cases}e^x+1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -e^{-x}-1, x<0.\end{cases}$ ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可得只有当 $x<0$ 时，$f(x)<0$. ………………………………………………… 8 分

因为 $f(\ln t)=-3$，所以 $-e^{-\ln t}-1=-3$，解得 $t=\frac{1}{2}$.

故 t 的值为 $\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $2a+b=ab$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. ………………………………………… 2 分

$a+2b=(a+2b)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})=1+4+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=9$，………………… 5 分

当且仅当 $a=b=3$ 时，等号成立. ……………………………………………………………… 6 分

(2)因为 a,b 为正实数，所以 $ab>0$. …………………………………………………… 8 分

因为 $2a+b=ab\geqslant 2\sqrt{2ab}$，所以 $(ab)^2-8ab\geqslant 0$，解得 $ab\geqslant 8$，……………… 11 分

当且仅当 $a=2,b=4$ 时，等号成立. ………………………………………………………… 12 分

19. (1)解：设在海拔 8000 米处的大气压强为 p''，

$\begin{cases}\ln p_0-\ln p'=4000k,\\ \ln p_0-\ln p''=8000k,\end{cases}$ ………………………………………………………… 2 分

所以 $2\ln\frac{p_0}{p'}=\ln\frac{p_0}{p''}$，解得 $p''=\frac{p'^2}{p_0}$. ……………………………………………… 5 分

(2)证明：设在第二级阶梯某处的海拔为 h_2，在第三级阶梯某处的海拔为 h_3，

则 $\begin{cases}\ln p_0-\ln p_2=10^{-4}h_2,\\ \ln p_0-\ln p_3=10^{-4}h_3,\end{cases}$ ……………………………………………………… 6 分

两式相减可得 $\ln\frac{p_3}{p_2}=10^{-4}(h_2-h_3)$. ……………………………………………… 8 分

因为 $h_2\in[1000,2000]$，$h_3\in[200,1000]$，所以 $h_2-h_3\in[0,1800]$，………………… 9 分

则 $0\leqslant\ln\frac{p_3}{p_2}\leqslant 10^{-4}\times 1800=0.18$，…………………………………………… 10 分

即 $1\leqslant\frac{p_3}{p_2}\leqslant e^{0.18}$，……………………………………………………………… 11 分

故 $p_2 \leqslant p_3 \leqslant e^{0.18} p_2$. ………………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)因为 $a_n a_{n+1}=2^{2n-5}$,所以 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{2n-3}$,两式相比得$\frac{a_{n+2}}{a_n}=4$. ………………… 1 分

因为 $a_1=\frac{1}{4}$,$a_1a_2=2^{-3}$,所以 $a_2=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 2 分

数列$\{a_{2n-1}\}$是以$\frac{1}{4}$为首项,4 为公比的等比数列;

数列$\{a_{2n}\}$是以$\frac{1}{2}$为首项,4 为公比的等比数列. ……………………………………………… 3 分

$a_{2n-1}=\frac{1}{4}\times 4^{n-1}=2^{(2n-1)-3}$,$a_{2n}=\frac{1}{2}\times 4^{n-1}=2^{2n-3}$. ……………………………………… 4 分

综上,$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-3}$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)$b_n=(5-n)\times 2^{n-3}$.

$T_n=(5-1)\times 2^{1-3}+(5-2)\times 2^{2-3}+(5-3)\times 2^{3-3}+\cdots+(5-n)\times 2^{n-3}$,

$2T_n=(5-1)\times 2^{2-3}+(5-2)\times 2^{3-3}+(5-3)\times 2^{4-3}+\cdots+(5-n)\times 2^{n-2}$. ……………… 8 分

两式相减得$-T_n=1-2^{-1}-2^{0}-\cdots-2^{n-3}-(5-n)\times 2^{n-2}$

$=1-\frac{2^{-1}(1-2^{n-1})}{1-2}-(5-n)\times 2^{n-2}=\frac{3}{2}+(n-6)\times 2^{n-2}$, ……………………………… 11 分

所以 $T_n=-\frac{3}{2}-(n-6)\times 2^{n-2}$. ……………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)$f(x)=\log_a(a^x+1)-x=\log_a(a^x+1)-\log_a a^x=\log_a\frac{a^x+1}{a^x}=\log_a(1+\frac{1}{a^x})$. … 2 分

因为 $1+\frac{1}{a^x}>1$,所以当 $a\in(0,1)$时,$\log_a(1+\frac{1}{a^x})\in(-\infty,0)$;

当 $a\in(1,+\infty)$时,$\log_a(1+\frac{1}{a^x})\in(0,+\infty)$.

故当 $a\in(0,1)$时,$f(x)$的值域为$(-\infty,0)$;当 $a\in(1,+\infty)$时,$f(x)$的值域为$(0,+\infty)$. ………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为关于 x 的方程 $\log_a(1+\frac{1}{a^x})=\log_a(c\cdot a^x-c)$只有一个解,

所以$\begin{cases} c\cdot a^x-c=c\cdot(a^x-1)>0, \\ 1+\frac{1}{a^x}=c\cdot a^x-c \end{cases}$有唯一解. ……………………………………………… 6 分

令 $t=a^x$,$t\in(0,+\infty)$,所以$\begin{cases} ct-c=c(t-1)>0, \\ 1+\frac{1}{t}=ct-c \end{cases}$有唯一解.

关于 t 的方程 $ct^2-(c+1)t-1=0$ 有唯一解,设 $g(t)=ct^2-(c+1)t-1$. ……………… 7 分

当 $c=0$ 时,$-t-1=0$,解得 $t=-1$,不符合题意. …………………………………………… 8 分

当 $c>0$ 时,$t>1$,$g(1)=-2<0$,所以一定有一个解,符合题意. ……………………… 10 分

当 $c<0$ 时,$t\in(0,1)$,$\Delta=(c+1)^2+4c=0$,解得 $c=-3\pm 2\sqrt{2}$.

当 $c=-3-2\sqrt{2}$, $t=\sqrt{2}-1$ 时,符合题意,当 $c=-3+2\sqrt{2}$, $t=-1-\sqrt{2}$ 时,不符合题意.

综上,c 的取值范围为 $\{-3-2\sqrt{2}\}\cup(0,+\infty)$. ………………………………………… 12 分

22.解:(1)令 $x=\mathrm{e}$,得 $\mathrm{e}^2f'(\mathrm{e})+\mathrm{e}f(\mathrm{e})=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}$,即 $\mathrm{e}f'(\mathrm{e})+f(\mathrm{e})=1$. ……………………… 2 分

因为 $f(\mathrm{e})=1$,所以 $f'(\mathrm{e})=0$. ……………………………………………………………… 3 分

故 $f(x)$ 的图象在 $x=\mathrm{e}$ 处的切线方程为 $y=1$. …………………………………………………… 4 分

(2)由题意可得,$f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$. ……………………………………………………………… 6 分

由 $x^2f'(x)+xf(x)=\mathrm{e}\ln x$,得 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}\ln x-xf(x)}{x^2}$. ……………………………………… 7 分

令函数 $t(x)=\mathrm{e}\ln x-xf(x)$,

则 $t'(x)=\dfrac{\mathrm{e}}{x}-f(x)-xf'(x)=\dfrac{\mathrm{e}}{x}-f(x)-x\cdot\dfrac{\mathrm{e}\ln x-xf(x)}{x^2}=\dfrac{\mathrm{e}(1-\ln x)}{x}$. ……… 8 分

因为 $x_1\in(1,\mathrm{e}]$,所以 $1-\ln x\in[0,1)$,则 $t'(x)\geqslant 0$,$t(x)$ 在 $(1,\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$t(x)_{\max}=t(\mathrm{e})=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}-\mathrm{e}f(\mathrm{e})=0$,即 $t(x)\leqslant 0$. ………………………………………… 9 分

所以 $f'(x)\leqslant 0$,$f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e}]$ 上单调递减,$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=1$. ……………………… 10 分

$g(x)$ 图象的对称轴方程是 $x=a$.

当 $a\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时,$g(x)_{\min}=g(2)=4a<f(x)_{\min}=1$,解得 $a<\dfrac{1}{4}$.

当 $a>\dfrac{3}{2}$ 时,$g(x)_{\max}=g(1)=2a+3<f(x)_{\min}=1$,无解.

综上,a 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{1}{4})$. ……………………………………………………… 12 分