2023—2024 学年第一学期 8 月六校联合调研试题

高三数学

2023．08

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则$|z|=$（　　）

A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．2

2．已知集合 $A=\{x\mid x^2+x-2<0\}$，$B=\{x\mid \lg x<1\}$，$A\cap B=$（　　）

A．$(-2，10)$　　　　B．$(0，1)$　　　　C．$(-2，1)$　　　　D．$(-\infty，10)$

3．等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=5$，$a_4+a_8=26$ 则 $S_7=$（　　）

A．45　　　　B．49　　　　C．56　　　　D．63

4．从 2 位男生，3 位女生中安排 3 人到三个场馆做志愿者，每个场馆各 1 人，且至少有 1 位男生入选，则不同安排方法有（　　）种

A．16　　　　B．36　　　　C．54　　　　D．96

5．“$m=8$”是“直线 $5x+12y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切”的（　　）条件

A．充分不必要　　　　B．必要不充分　　　　C．充要　　　　D．既不充分也不必要

6．在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 且垂直于 x 轴的直线与 C 交于 P，Q 两点，F_1Q 与 y 轴的交点为 R，$F_1Q\perp PR$，则 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．2　　　　D．$\sqrt{5}$

7．已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)=\dfrac{3}{4}$，则 $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=$（　　）

A．$\dfrac{24}{25}$　　　　B．$\dfrac{7}{25}$　　　　C．$-\dfrac{7}{25}$　　　　D．$-\dfrac{24}{25}$

8．已知函数 $f(x)$及其导函数 $f'(x)$的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$，若 $f(2x+1)$，$g(x-1)$ 均为偶函数，则下列等式一定正确的是（　　）

A．$f(-1)=0$　　　　B．$f(3)=f(-5)$　　　　C．$g(2)=0$　　　　D．$g(-\frac{1}{2})=g(\frac{7}{2})$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑．

9．给出下列命题中，其中正确的命题是（　　）

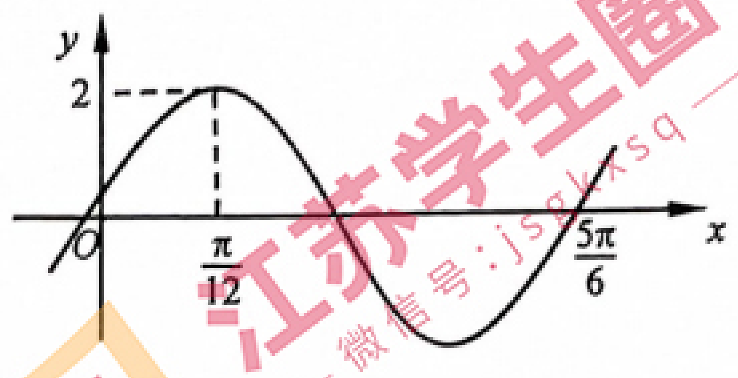
A．随机变量 $X\sim B\left(4，\dfrac{1}{4}\right)$，则 $E(X)=1$

B．已知 $P(B|A)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=\dfrac{1}{8}$，则 $P(A)=\dfrac{1}{4}$

C．随机变量 $X\sim N(2，3^2)$，若 $X=\dfrac{1}{3}Y-2$，则 $E(Y)=12$，$D(Y)=81$

D．以模型 $y=(c-1)\mathrm{e}^{2kx}$ 拟合一组数据时，为了求回归方程，设 $z=\ln y$，将其变换后得到线性方程 $z=\dfrac{1}{2}x+2$，则 c，k 的值分别是 e^2-1 和 0.2

10．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图像如图所示，则（　　）



A．函数解析式 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

B．将函数 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度可得函数 $f(x)$的图像

C．直线 $x=-\frac{11\pi}{12}$是函数 $f(x)$图像的一条对称轴

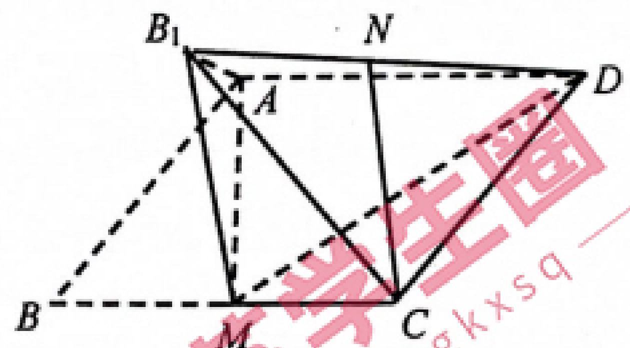
D．函数 $f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{2}, 0]$上的最大值为 2

11．如果有限数列$\{a_n\}$满足 $a_i=a_{n-i+1}(i=1, 2, \cdots, n)$，则称其为“对称数列”，设$\{b_n\}$是项数为 $2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$的“对称数列”，其中 b_k，b_{k+1}，$\cdots$，b_{2k-1}是首项为 50，公差为-4 的等差数列，则（　　）

A．若 $k=10$，则 $b_1=10$　　　　B．若 $k=10$，则$\{b_n\}$所有项的和为 590

C．$\{b_n\}$所有项的和可能为 0　　　　D．当 $k=13$ 时，$\{b_n\}$所有项的和最大

12．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，M 为 BC 的中点，将$\triangle ABM$ 沿直线 AM 翻折到$\triangle AB_1M$ 的位置，连接 B_1C 和 B_1D，N 为 B_1D 的中点，在翻折过程中，则下列结论中正确的是（　　）



A．面 $AB_1M\perp$面 B_1MC

B．线段 CN 长度的取值范围为$[1, \sqrt{3}]$

C．直线 AM 和 CN 所成的角始终为$\frac{\pi}{6}$

D．当三棱锥 B_1-AMD 的体积最大时，点 C 在三棱锥 B_1-AMD 外接球的外部

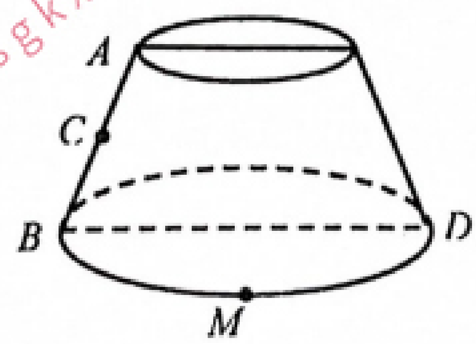
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{2}{x})^6$ 的展开式的中间一项的系数是________（用数字作答）．

14．已知向量 $\boldsymbol{a}=(5, 2)$，$\boldsymbol{b}=(-1, 2)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为________．

15．函数 $f(x)=(x^2+1)\ln x-m(x^2-1)$ 为在定义域内为增函数，则实数 m 的取值范围为________．

16．如图，C 是圆台母线 AB 的中点，BD 是底面的直径，上底面半径为 1，下底面半径为 2，$AB=2$，点 M 是弧 BD 的中点，则 C、M 两点在圆台侧面上连线长最小值的平方等于________．



四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分10分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=3$，$S_n=a_n+n^2-1$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\dfrac{1}{a_n}$，$T_n=b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_nb_{n+1}$，求$T_n$．

18．（本小题满分12分）请从下面三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并解答．

① $(a+c)(\sin A-\sin C)+(b-a)\sin B=0$；② $2\sqrt{3}\sin C\cos C=1+2\cos^2 C$；

③ $2\sin B-\sin A=2\sin C\cos A$．

在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c，若_________．

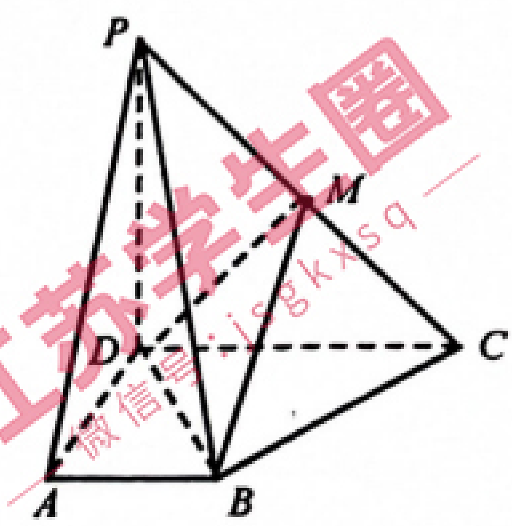
（1）求角C；

（2）若$c=4$，求$\triangle ABC$周长的取值范围．

19．（本小题满分12分）已知四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，$PD=CD=2$，$AD=AB=1$，$AB\perp DA$，$AB/\!/CD$．

（1）求证：平面$PAD\perp$平面PCD；

（2）设M是棱PC上的点，若二面角$M-BD-A$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，试求直线BC与平面BDM所成角的正弦值．

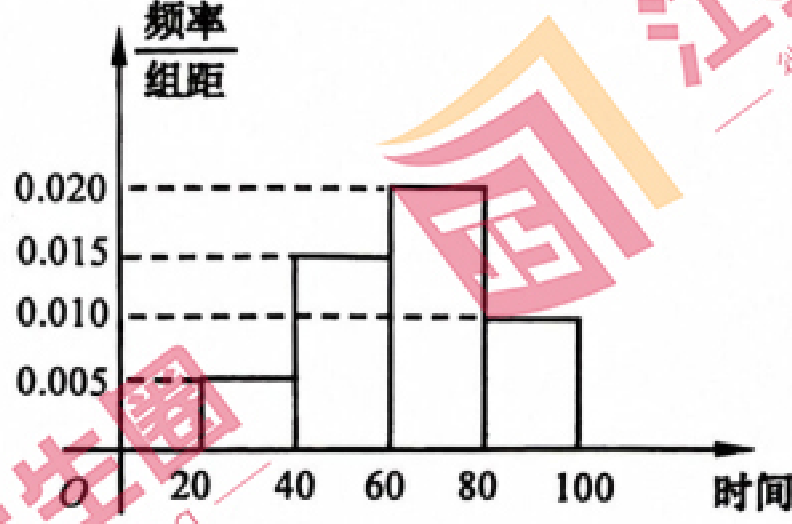


20．（本小题满分12分）已知椭圆C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右顶点分别为$A_1$，$A_2$，上顶点为$B$，$\cos\angle A_1BA_2=-\dfrac{3}{5}$，椭圆$C$的长轴长比短轴长大4．

（1）求椭圆C的方程；

（2）斜率存在且不为0的直线l交椭圆C于P，Q两点（异于点A_1），且$|\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_1Q}|=|\overrightarrow{A_1P}-\overrightarrow{A_1Q}|$，证明：直线$l$恒过定点，并求出定点坐标．

21．（本小题满分 12 分）春节期间，我国高速公路继续执行“节假日高速公路免费政策”．某路桥公司为掌握春节期间车辆出行的高峰情况，在某高速公路收费点记录了大年初三上午 9:20~10:40 这一时间段内通过的车辆数，统计发现这一时间段内共有 600 辆车通过该收费点，它们通过该收费点的时刻的频率分布直方图如下图所示，其中时间段 9:20~9:40 记作区间[20，40)，9:40~10:00 记作[40，60)，10:00~10:20 记作[60，80)，10:20~10:40 记作[80，100)．例如：10 点 04 分，记作时刻 64．



（1）估计这 600 辆车在 9:20~10:40 时间段内通过该收费点的时刻的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）；

（2）为了对数据进行分析，现采用分层抽样的方法从这 600 辆车中抽取 10 辆，再从这 10 辆车中随机抽取 4 辆，设抽到的 4 辆车中，在 9:20~10:00 之间通过的车辆数为 X，求 X 的分布列与数学期望；

（3）由大数据分析可知，车辆在每天通过该收费点的时刻 T 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 可用这 600 辆车在 9:20~10:40 之间通过该收费点的时刻的平均值近似代替，σ^2 可用样本的方差近似代替（同一组中的数据用该组区间的中点值代表），已知大年初五全天共有 1000 辆车通过该收费点，估计在 9:46~10:40 之间通过的车辆数（结果保留到整数）．

参考数据：若 $T\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<T\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<T\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<T\leqslant\mu+3\sigma)=0.9973$．

22．（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=e^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b$，a，$b\in\mathbf{R}$．

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调区间；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，1)$ 处的切线 l 与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(1，c)$，求 a，b，c 的值；

（3）若 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值．