

绝密★启用前

2023—2024 学年高中毕业班阶段性测试(一)

## 理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.  $\frac{i}{(1+i)^3} =$   
 A.  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$                       B.  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$                       C.  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$                       D.  $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
2. 已知集合  $A = \{x | \sqrt{x} \geq 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 \leq 9\}$ , 则  $[-3, +\infty) =$   
 A.  $\mathbb{R}(A \cap B)$                       B.  $\mathbb{R}(A \cup B)$                       C.  $A \cap B$                       D.  $A \cup B$
3. 已知函数  $f(x) = x^2 \sin x - 1$ , 若  $f(x_0) = 10$ , 则  $f(-x_0) =$   
 A. -12                      B. -11                      C. -10                      D. 10
4. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 2, \\ 2x-3y \leq 9, \\ x \geq 0, \end{cases}$  则  $z = 4x + y$  的最大值为  
 A. 3                      B. 7                      C. 11                      D. 15
5. 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_1 = 10$ , 且  $\left\{\frac{1+a_n}{3}\right\}$  是公差为 -1 的等差数列, 则  $S_n$  的最大值为  
 A. 12                      B. 22                      C. 37                      D. 55
6. 对于任意实数  $x$ , 用  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数, 例如:  $[\pi] = 3, [0.1] = 0, [-2.1] = -3$ , 则“ $[x] > [y]$ ”是“ $x > y$ ”的  
 A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
 C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数  $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{10}\right)$ , 若将  $y = f(x)$  的图象向左平移  $m (m > 0)$  个单位长度后所得的图象关于坐标原点对称, 则  $m$  的最小值为

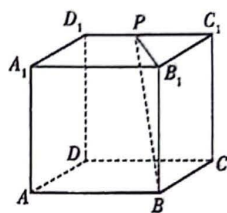
- A.  $\frac{\pi}{10}$                       B.  $\frac{\pi}{5}$                       C.  $\frac{3\pi}{10}$                       D.  $\frac{8\pi}{15}$

8. 位于成都市龙泉驿区的东安湖体育公园是第 31 届世界大学生夏季运动会的核心场馆, 它包含一座综合运动场、一座多功能体育馆、一座游泳跳水馆和一座综合小球馆. 现安排包含甲、乙在内的 6 名同学到这 4 个场馆做志愿者, 每人去 1 个场馆, 每个场馆至少安排 1 个人, 则甲、乙两人安排在相同场馆的方法种数为



- A. 96                      B. 144                      C. 240                      D. 360

9. 如图所示, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $P$  在棱  $C_1D_1$  上, 且  $BP = 3$ , 则点  $A, C$  到平面  $BB_1P$  的距离之和为



- A.  $\sqrt{5}$                       B.  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$   
C.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$                       D.  $2\sqrt{2}$

10. 把过棱锥的顶点且与底面垂直的直线称为棱锥的轴, 过棱锥的轴的截面称为棱锥的轴截面. 现有一个正三棱锥、一个正四棱锥、一个正六棱锥, 它们的高相等, 轴截面面积的最大值也相等, 则此正三棱锥、正四棱锥、正六棱锥的体积之比为

- A.  $1 : \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{9}{4}$                       B.  $1 : \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{9}{8}$                       C.  $1 : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{9}{8}$                       D.  $1 : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{3}{2}$

11. 在  $\triangle ABC$  中,  $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ,  $E$  是线段  $AD$  上的动点 (与端点不重合), 设  $\overrightarrow{CE} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} (x, y \in \mathbf{R})$ , 则  $\frac{8x+3y}{3xy}$  的最小值是

- A. 6                      B. 7                      C. 8                      D. 9

12. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 以坐标原点  $O$  为圆心, 线段  $OF$  为半径作圆, 与  $C$  的右支的一个交点为  $A$ , 若  $\cos \angle AOF = \frac{\sqrt{13}}{7}$ , 则  $C$  的离心率为

- A.  $\sqrt{3}$                       B. 2                      C.  $\sqrt{5}$                       D.  $\sqrt{7}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 直线  $y = 4$  与抛物线交于点  $M$ , 且  $|MF| = 4$ , 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

14. 某品牌新能源汽车 2019—2022 年这四年的销量逐年增长, 2019 年销量为 5 万辆, 2022 年销量为 22 万辆, 且这四年销量的中位数与平均数相等, 则这四年的总销量为 \_\_\_\_\_ 万辆.

15. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = 3a_n + 2, a_3 + a_2 = 22$ , 则满足  $a_n > 160$  的最小正整数  $n =$  \_\_\_\_\_.
16. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  满足  $f'(x) > -f(x)$ , 若  $f(\ln 3) = \frac{1}{3}$ , 则满足不等式  $f(x) > \frac{1}{e^x}$  的  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

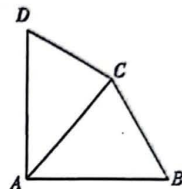
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $\angle BAD = 90^\circ, D = 60^\circ, AC = 4, CD = 3$ .

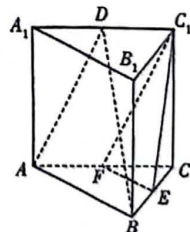
- (I) 求  $\cos \angle CAD$ ;
- (II) 若  $AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ , 求  $BC$ .



18. (12 分)

如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC = 2BC = CC_1 = 2, D, E, F$  分别是棱  $A_1C_1, BC, AC$  的中点,  $\angle ACB = 60^\circ$ .

- (I) 证明: 平面  $ABD \parallel$  平面  $FEC_1$ ;
- (II) 求直线  $AC$  与平面  $ABD$  所成角的正弦值.



19. (12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $(2, 3)$ , 且  $C$  的右焦点为  $F(2, 0)$ .

- (I) 求  $C$  的离心率;
- (II) 过点  $F$  且斜率为 1 的直线与  $C$  交于  $M, N$  两点,  $P$  是直线  $x = 8$  上的动点, 记直线  $PM, PN, PF$  的斜率分别为  $k_{PM}, k_{PN}, k_{PF}$ , 证明:  $k_{PM} + k_{PN} = 2k_{PF}$ .

20. (12分)

小李参加某项专业资格考试,一共要考3个科目,若3个科目都合格,则考试直接过关;若都不合格,则考试不过关;若有1个或2个科目合格,则所有不合格的科目需要进行一次补考,补考都合格的考试过关,否则不过关.已知小李每个科目每次考试合格的概率均为 $p$  ( $0 < p < 1$ ),且每个科目每次考试的结果互不影响.

(I)记“小李恰有1个科目需要补考”的概率为 $f(p)$ ,求 $f(p)$ 的最大值点 $p_0$ .

(II)以(I)中确定的 $p_0$ 作为 $p$ 的值.

(i)求小李这项资格考试过关的概率;

(ii)若每个科目每次考试要缴纳20元的费用,将小李需要缴纳的费用记为 $X$ 元,求 $E(X)$ .

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{me^x}{\sin x}$ ,  $m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$ .

(I)若当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) \geq 1$ 恒成立,求 $m$ 的取值范围;

(II)若 $\exists x_1, x_2 \in (0, \pi)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ,使得 $f(x_1) = f(x_2)$ ,求证: $x_1 + x_2 > \frac{\pi}{2}$ .

(二)选考题:共10分.请考生在第22,23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{6} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} + \sqrt{6} \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$ 为参数),以原点 $O$

为极点, $x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ .

(I)求曲线 $C$ 的普通方程和直线 $l$ 的直角坐标方程;

(II)若直线 $l$ 与曲线 $C$ 交于 $A, B$ 两点,与 $x$ 轴交于点 $P$ ,求 $|PA|^2 + |PB|^2$ 的值.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = 2|x+1|$ ,  $g(x) = 4 + |2x-1|$ .

(I)求不等式 $f(x) + 2 \leq g(x)$ 的解集;

(II)若关于 $x$ 的不等式 $f(x) + g(x) \geq 2a^2 - 13a$ 的解集为 $\mathbf{R}$ ,求实数 $a$ 的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

