2023年湖北新高考协作体高一5月联考
高一数学参考答案

1-5：CABBD　　　6-8：CDB

9.AC 10.BCD 11.CD　12.ACD

12.ACD

A.在ΔABC中，$AB=2$，$BC=AD=1$，$\angle ABC=60^{\circ}$，由余弦定理可得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 60^{\circ}=3, \therefore AB^2=AC^2+BC^2, \therefore BC\perp AC.$

$\because BC\perp AP$，$AP\cap AC=A$，$\therefore BC\perp$平面APC，$\because BC\subset$平面ABC，$\therefore$平面$APC\perp$平面ABC，故A对.

B.取AC的中点E点，过点E点作$EF\perp AB$于点F，$\because PA=PC$，$\therefore PE\perp AC$，

$\because$平面$APC\perp$平面ABC，平面$APC\cap$平面$ABC=AC$，$\therefore PE\perp$平面ABC，

又$\because EF\perp AB$，$\therefore \angle PFE$是二面角$P-AB-C$的平面角，在$Rt\Delta PFE$中，

$PE=\dfrac{1}{2}$，$EF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$\tan\angle PFE=\dfrac{PE}{EF}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故$B$错.

C.在$Rt\Delta ABC$中，取AB的中点O'，过O'点作PE的平行直线，

则三棱锥$P-ABC$的外接球的球心O在这条直线上，设外接球O的半径

为R，则$\sqrt{R^2-\dfrac{1}{4}}=\sqrt{R^2-1}+\dfrac{1}{2}$，算得$R^2=\dfrac{5}{4}$，故外接球$O$的表面积为$5\pi$，

故C对.

D.由$PE\perp$平面ABC，$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

在ΔPAB中，$PA=1$，$PB=\sqrt{2}$，$AB=2$，由余弦定理得$\cos\angle PAB=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore \sin\angle PAB=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$\therefore S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}PA\cdot AB\sin\angle PAB=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.设点$C$到平面$APB$

的距离为d，由$V_{C-PAB}=V_{P-ABC}$可得$d=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.故D对.

13. $(-2,-4)$

14. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

15. $\dfrac{13}{19}$

16. $(108-44\sqrt{6})\pi$

17.（1）$k=6$（5分）（2）$k\in\left(-\infty,-\dfrac{8}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{8}{3},6\right)$（10分）

18.证明:(1)

在正方形$ABCD$中，$AD//BC$，

又由$AD\subset$平面ADE，$BC\not\subset$平面ADE，

故$BC//$平面ADE .

$\because FB//ED$，同理可证$FB//$平面ADE，

又$\because BC\cap BF=B$，$BC,BF\subset$平面BCF，

$\therefore$平面$ADE//$平面BCF,?………………………………………… 4分

又$\because EA\subset$平面EAD，

$\therefore EA//$平面BCF.?…………………………………………………6分

(2)如图，连接BD交AC于O，连接OE,OF.设$AB=ED=2FB=2$，则$AB=BC=AD=2$.

由$ED\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，

所以$ED\perp AC$，又$AC\perp BD$，且$ED\cap BD=D$，$ED,BD\subset$平面$BDEF$，

所以$AC\perp$平面$BDEF$，

又$OE,OF\subset$平面$BDEF$，所以$AC\perp OE,AC\perp OF$，

所以$\angle EOF$是二面角$E-AC-F$的平面角,…………………………9分

在三角形EOF中，$OF=\sqrt{OB^2+FB^2}=\sqrt{3}$,

$OE=\sqrt{OD^2+ED^2}=\sqrt{6}$，$EF=\sqrt{BD^2+(ED-FB)^2}=3$,

所以$EF^2=OE^2+OF^2$，所以$OE\perp OF$，---11分

二面角$E-AC-F$是直二面角，即证平面$EAC\perp$平面FAC.?……12分

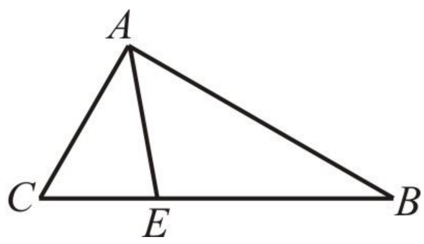
19. 解（1）$\because \sin 2B=\sin C,\therefore 2\sin B\cos B=\sin C,$

$$\Rightarrow 2\cos B=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}=\sqrt{3}\Rightarrow \cos B=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because c>b,\therefore B\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow B=\frac{\pi}{6},C=\frac{\pi}{3}$$ ………………………………………………………5分

（2）$\because A=\frac{\pi}{2},\ C=\frac{\pi}{3},B=\frac{\pi}{6}$



$S_{\triangle ACE}+S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}$

$$\frac{1}{2}AC\bullet AE\bullet\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}AB\bullet AE\bullet\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}AC\bullet AB\bullet\sin A$$

$$\Rightarrow\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{AE}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}=\frac{2\cos 45^\circ}{AE},\quad \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{AE}.$$

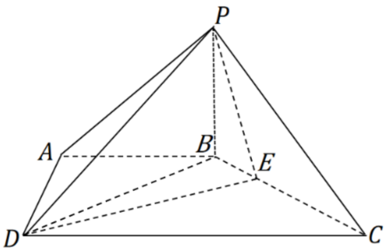
$$AE=\frac{3\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{\triangle ABE}=\frac{9\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$ ``````````````````````````````````12 分

20.【解析】

（1） 证明：如图所示，连接BD。

设$PB=AB=AD=1$,则$CD=2$



$\because \triangle ABD$为等腰直角三角形

$\therefore AB=\sqrt{2}$

又$\angle BDC=45°, DC=2$

$\therefore BC=\sqrt{2}$

$\therefore BD\perp BC$

又$PB\perp$平面BCD, $\therefore PB\perp BC$

$\therefore BC\perp$平面PBD

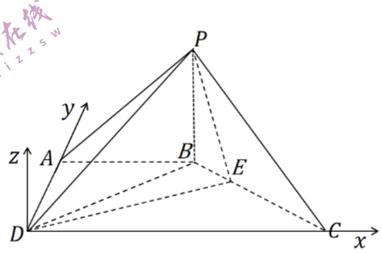
$\therefore BC\perp PD$?…………………………………………………4分

（2）

方法一：空间向量法

如图，以 D 为原点，$\overrightarrow{DC}$ 方向为 x 轴，$\overrightarrow{DA}$ 方向为 y 轴，$\overrightarrow{BP}$ 方向为 z 轴建立空间直角坐标系。

设$PB=AB=AD=1$,则$CD=2$。



则各点坐标为：

$D(0,0,0)$，$A(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C(2,0,0)$，$P(1,1,1)$---6 分

假设存在，设$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则点 E 的坐标为$(\lambda+1,-\lambda+1,0)$。

设$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$和$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$分别为平面 PAD 和平面 PDE 的法向量。

$\because \overrightarrow{DA}=(0,1,0),\ \ \overrightarrow{AP}=(1,0,1)$

$$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases},\quad \text{即}\begin{cases}y_1=0\\ x_1+z_1=0\end{cases}$$

令 $x_1=1$，得 $y_1=0,\ z_1=-1$． $\therefore \overrightarrow{n_1}=(1,0,-1)$

$\because \overrightarrow{DP}=(1,1,1),\ \ \overrightarrow{DE}=(\lambda+1,-\lambda+1,0)$

$$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases},\quad \text{即}\begin{cases}x_2+y_2+z_2=0\\ (\lambda+1)x_2+(-\lambda+1)y_2=0\end{cases}$$

令 $x_2=1$，得：$y_2=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$，$z_2=\dfrac{-2\lambda}{\lambda-1}$ $\quad\therefore \overrightarrow{n_2}=(1,\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1},\dfrac{-2\lambda}{\lambda-1})$ ……………… 8 分

$\because$平面$PAD\perp$平面PDE

$\therefore \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

$\therefore 1+\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}=0 \qquad \therefore \lambda=\dfrac{1}{3}$

$\therefore E(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},0) \qquad \overrightarrow{PE}=(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-1)$

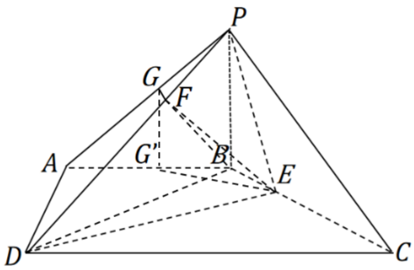
设直线 PE 与平面 PAD 夹角为 θ，则：

$$\sin\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PE}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{PE}|}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$$

所以，线段 BC 上存在点 E，使得平面 $PAD\perp$ 平面 PDE，直线 PE 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$ ••12 分

方法二：几何法

假设存在，如图，作 $BF\perp PD$，垂足为 F，连接 EF



作 $FG\perp PD$，垂足为 F

$\because PD\perp BE,\ PD\perp BF$

$\therefore PD\perp$ 平面FBE

$\therefore FE\perp PD$

又$GF\perp PD$

$\therefore \angle GFE$为二面角$A-PD-E$的平面角 ……………………………8分

$\therefore \angle GFE=90^\circ$

在直角三角形 PDB 中，
$$PB=1,\ BD=\sqrt{2},\ \therefore PD=\sqrt{3}$$
$$\therefore BF=PB\cdot\sin\angle DPB=\frac{\sqrt{6}}{3},\ PF=PB\cdot\cos\angle FPB=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

在直角三角形 PAD 中，$AD=1,\ AP=\sqrt{2},\ PD=\sqrt{3}\ \ \therefore GF=PF\cdot\tan\angle APD=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

作 $GG'\perp AB$，垂足为 G'，$PG=\dfrac{PF}{\cos\angle APD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}AP$

$\therefore GG'=\dfrac{1}{2}$

设 $BE=x$，又 $BG'=\dfrac{1}{2}$，$\angle G'BE=135^\circ$

由余弦定理，$G'E^2=G'B^2+BE^2-2G'B\cdot BE\cdot\cos135^\circ=x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{1}{4}$

又 $GG'//PB\quad \therefore GG'\perp G'E$

$\therefore GE^2=GG'^2+G'E^2=x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{1}{2}$

$\because EB\perp PD,\ \ \mathrm{EB}\perp\mathrm{BD}$

$\therefore \mathrm{EB}\perp$ 平面PDB

$\therefore EB\perp BF$

$\therefore EF^2=EB^2+BF^2=x^2+\dfrac{2}{3}$

$\because \angle GFE=90^\circ$

$\therefore GF^2+FE^2=GE^2$

$\therefore \dfrac{1}{6}+x^2+\dfrac{2}{3}=x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{1}{2}$ 解得：$x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ •••••••••••••••••••••••• 10 分

$\therefore PE=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$， $EF=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\because EF\perp PD$, 平面$PAD\perp$平面PDE

$\therefore EF\perp$平面PAD

设直线 PE 与平面 PAD 夹角为 θ，则：$\sin\theta=\dfrac{EF}{PE}=\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$

所以，线段 BC 上存在点 E，使得平面 $PAD\perp$平面 PDE，直线 PE 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$ ••12 分

21．（1） $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

若 $f(x)=\dfrac{1}{2}$，即 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$，

则 $\sin(4x+\dfrac{5\pi}{6})=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1-2\times(\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{7}{8}$. •••••••••• 5 分

（2）易知 $h(x)=2\sin 2x$，

根据题意，设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $\dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{4}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$，所以 $1\le t\le\sqrt{2}$，

所以原方程变为 $kt+2\left(t^2-1\right)+5=2t^2+kt+3=0,1\le t\le\sqrt{2}$，

令 $g(t)=2t^2+kt+3,1\le t\le\sqrt{2}$

因为原方程有 4 个零点，而方程 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 至多两个根，

所以 $1\le t<\sqrt{2}$，且 $g(t)$ 在 $1\le t<\sqrt{2}$ 有两个零点，•• 8 分

则 $\begin{cases} g(1)=2+k+3\ge 0 \\ 1<-\dfrac{k}{2\times 2}<\sqrt{2} \\ \Delta=k^2-4\times 2\times 3>0 \\ g\left(\sqrt{2}\right)=2\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}k+3>0 \end{cases}$，解得 $-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}<k<-2\sqrt{6}$，

即 $k\in\left(-\dfrac{7\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{6}\right)$. •• 12 分

22. 解：

(1) 由题有 $g(x)=f(x-1)-2$ 为奇函数，则 $f(-x-1)-2+f(x-1)-2=0$ 恒成立.

即 $(-1-x)^3+a(-1-x)^2+b(-1-x)+1+(-1+x)^3+a(-1+x)^2+b(-1+x)_1+1=4$，

整理得: $(2a-b)x^2+(2a-2b-4)=0$ 恒成立.

则 $a=3,b=1$，故： $f(x)=x^3+3x^2+x+1$. ·· 4 分

(2) ①若 $a=0$，则 $f(x)=x^3+bx=1$，由题有 $f(x)-k=0$ 的三个实根为 x_1,x_2,x_3.

设 $x^3+bx+(1-k)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，

展开得 $x^3+bx+(1-k)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$，

故 $x_1+x_2+x_3=0$.

则 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(k-1)-bx_1+(k-1)-bx_2+(k-1)-bx_3=3k-3$.

又 $k\in[0,1]$, 故 $3k-3\in[-3,0]$，综上：当 $k\in[0,1]$ 时，$x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 的最大值为 0. ··············· 8 分

② $a=-3,b=-2$ 时，$f(x)=x^3-3x^2-2x+1$，由 $f(x)=0$ 有 $x^3-3x^2-2x+1=0$，同时除以 x^3 得: (1) 令 $\frac{1}{x_1}=t_1,\frac{1}{x_2}=t_2,\frac{1}{x_3}=t_3$，

由题知 t_1,t_2,t_3 是方程 $t^3-2t^2-3t+1=0$ 的三个根，

则 $t^3-2t^2-3t+1=(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$. 展开得 $\begin{cases}t_1+t_2+t_3=2\\ t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=-3\\ -t_1t_2t_3=1\end{cases}$，

则 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=t_1^2+t_2^2+t_3^3=(t_1+t_2+t_3)^2-2(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)=4+6=10$. ························ 12 分