2023年普通高等学校招生全国统一考试
数学模拟测试参考答案

1. D 【命题意图】本题考查集合的交集,要求学生理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.

【解题分析】∵集合 $A=\{x|-1\leqslant x-1\leqslant 2\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<2\}=\{-1,0,1\}$,

∴$A\cap B=\{0,1\}$. 故选 D.

2. B 【命题意图】本题考查复数的运算,要求学生掌握复数代数表达式的四则运算,了解复数加减运算的几何意义.

【解题分析】由 $\frac{z}{1-\mathrm{i}}=3+2\mathrm{i}$ 得 $z=(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3-3\mathrm{i}+2\mathrm{i}+2=5-\mathrm{i}$.

3. C 【命题意图】本题考查命题的否定,要求学生能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

【解题分析】∵命题"$\exists x\in(-1,3)$, $x^2-1\leqslant 2x$"是存在量词命题,

∴它的否定是"$\forall x\in(-1,3)$, $x^2-1>2x$". 故选 C.

4. A 【命题意图】本题考查直线的交点,要求学生理解直线的倾斜角和斜率的概念,能用解方程组的方法求出两条直线的交点坐标.

【解题分析】易知直线 $y=x+2$ 与 $y=-2x+4$ 的交点为 $(\frac{2}{3},\frac{8}{3})$,所以 $\frac{8}{3}=\frac{2}{3}k$,解得 $k=4$.

5. D 【命题意图】本题考查等差数列,要求学生探索并掌握等差数列的前 n 项和公式,会求构造数列的前 n 项和.

【解题分析】易知 $S_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=-a_1+2a_2-a_3+2a_4-a_5+\cdots+2a_{2n}$

$=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{2n-1}+a_{2n})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=2\times n+\frac{1}{2}\times n\times(3+4n-1)=2n^2+3n$.

故选 D.

6. A 【命题意图】本题考查平面向量基本定理,要求学生了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

【解题分析】在△ABC 中,设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$, $\lambda\in\mathbf{R}$. 由 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$ 可得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,

故 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AC}$.

又 E 是 AB 的中点, $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$,所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$.

所以 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AE}+\frac{8}{9}\lambda\overrightarrow{AF}$.

由点 E, M, F 三点共线,可得 $\frac{2\lambda}{3}+\frac{8\lambda}{9}=1$.

解得 $\lambda=\frac{9}{14}$,故 $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$. 故选 A.

7. D 【命题意图】本题考查函数概念及单调性，要求学生会借助函数图象，用符号语言表达函数的单调性、最大值、最小值，理解它们的作用和实际意义.

【解题分析】因为 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，所以存在唯一的 $t\in(0,+\infty)$，使得 $f(t)=5$，则 $f(x)-x-\log_2 x=t$，$f(x)=t+x+\log_2 x$，$f(t)=2t+\log_2 t=5$. 因为 $y=2t+\log_2 t$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $2\times2+\log_2 2=5$，所以 $t=2$，所以 $f(x)=x+\log_2 x+2$. 因为 $f(x)$ 在 $[1,8]$ 上单调递增，所以 $f(1)\leqslant f(x)\leqslant f(8)$，得 $3\leqslant f(x)\leqslant 13$.

8. C 【命题意图】本题考查三角函数，要求学生理解三角函数及其性质，会利用三角恒等变换化简三角函数，并根据函数性质确定相关量的值.

【解题分析】由已知得 $f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because$ 对于任意实数 x 都有 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}=A\sin(\omega x+\varphi)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 成立，

即对于任意实数 x 都有 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=A\sin(\omega x+\varphi)$ 成立.

$\therefore y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的最值和最小正周期相同，

$\therefore |A|=1$，$|\omega|=2$，即 $A=\pm1$，$\omega=\pm2$.

①当 $A=1$，$\omega=2$ 时，$\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(2x+\varphi)$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $\varphi\in[0,3\pi)$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$ 或 $\varphi=\frac{7\pi}{3}$；

②当 $A=1$，$\omega=-2$ 时，$\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(-2x+\varphi)$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $\varphi\in[0,3\pi)$，$\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\varphi=\frac{8\pi}{3}$；

③当 $A=-1$，$\omega=2$ 时，$\sin(2x+\frac{\pi}{3})=-\sin(2x+\varphi)$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}-(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $\varphi\in[0,3\pi)$，$\therefore\varphi=\frac{4\pi}{3}$；

④当 $A=-1$，$\omega=-2$ 时，$\sin(2x+\frac{\pi}{3})=-\sin(-2x+\varphi)$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $\varphi\in[0,3\pi)$，$\therefore\varphi=\frac{5\pi}{3}$.

综上所述，满足条件的 φ 的值有 6 个. 故选 C.

9. AC 【命题意图】本题考查事件之间的关系，要求学生了解两个随机事件独立性的含义，会进行事件间的独立性和对立性的判断.

【解题分析】从两个盒子中取出的两个数字之和只有 2 种结果：偶数和奇数. 而"数字之和为 9"是结果为奇数的其中一种情况，所以事件 A 与 B 是互斥事件而不是对立事件，选项 A 正确. 从

两个盒子各取 1 个小球，共有 $4\times4=16$ 种结果，其中数字之和为偶数的有 8 种；数字之和等于 9 的有 $5+4,6+3,7+2,8+1$ 这 4 种；数字之和大于 9 的有 $6+4,7+3,7+4,8+3,8+4,8+2$ 这 6 种. 所以 $P(A)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{3}{8}$. 因为 $P(B)+P(C)=\frac{5}{8}\neq1$，所以 B 与 C 不是对立事件，选项 B 错误. 事件(AC)为"取出的数字之和为偶数且大于 9"，其结果有 4 种：$6+4,7+3,8+2,8+4$. 所以 $P(AC)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，显然 $P(AC)\neq P(A)P(C)$，所以 A 与 C 不是相互独立事件，选项 C 正确. 因为当取出的数字之和为偶数时，不可能出现取出的数字之和等于 9 这种情况，所以$P(AB)=0$，而 $P(A)P(B)=\frac{1}{8}\neq0$，所以 A 与 B 不是相互独立事件，选项 D 错误.

10. ABD 【命题意图】本题考查频率分布直方图，要求学生结合实例，能用样本估计总体的集中趋势与离散程度参数，会根据频率分布直方图获取样本数字特征.

【解题分析】对于选项 A，质量的平均数为$(96\times0.025+98\times0.15+100\times0.225+102\times0.075+104\times0.025)\times2=99.7$(克)，选项 A 正确；

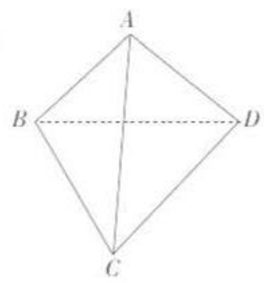
对于选项 B，优等品有 $0.225\times2\times100=45$ 件，选项 B 正确；

对于选项 C，频率分布直方图上不能判断质量众数所在区间，质量众数不一定落在区间$[98,100)$内，所以选项 C 错误；

对于选项 D，质量在$[99,101)$内的有 45 件，质量在$[101,103)$内的有 15 件，质量在$[103,105]$内的有 5 件，所以质量的中位数一定落在区间$[99,101)$内，所以选项 D 正确.

11. BC 【命题意图】本题结合数学文化考查空间几何体，要求学生了解空间几何体的特征，会进行几何体的体积和表面积计算.

【解题分析】由已知可知勒洛四面体内的四面体是正四面体，根据题意画出正四面体 $A-BCD$，如图所示，



设正四面体的棱长为 x，所以正四面体底面外接圆的半径 $R=\frac{1}{2}\times\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{x}{\sqrt{3}}$，

则正四面体的高 $h=\sqrt{x^2-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}=2\sqrt{2}$，解得 $x=2\sqrt{3}$，

所以正四面体的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\sin 60^\circ\times2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$，$AB=2\sqrt{3}$，

$R=2$. 故 A 项错误，B、C 两项正确. 又因为两个该勒洛四面体的表面积小于半径为 $2\sqrt{3}$的一个球的表面积，而半径为 $2\sqrt{3}$的一个球的表面积为 $4\pi\times(2\sqrt{3})^2=48\pi$，所以该勒洛四面体的表面积小于 24π. 故 D 项错误.

12. ACD 【命题意图】本题考查直线与椭圆，要求学生理解椭圆的基本性质，会进行有关量的计算.

【解题分析】∵椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，

∴不妨设椭圆 $C:\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$.

∵C 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，

∴$\triangle AF_1F_2$ 为等边三角形，

∵过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，

∴$k_{DE}=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故 C 项正确.

由等腰三角形的性质可得$|AD|=|DF_2|$，$|AE|=|EF_2|$，

由椭圆的定义可得$\triangle ADE$ 的周长为$|DE|+|DF_2|+|EF_2|=4a=26$，

∴$a=\dfrac{13}{2}$，$b=\dfrac{13}{4}\sqrt{3}$. 故 A 项正确，B 项错误. 对于 D 项，通过运算可知，$|DE|=\dfrac{2a}{1+\dfrac{c^2\sin^2 30^\circ}{b^2}}=$

$\dfrac{13}{1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}}=12$. 故 D 项正确.

13. $(-\infty,2]$ **【命题意图】**本题考查函数的性质，要求学生了解函数图象的平移与单调性和奇偶性的综合关系.

【解题分析】根据题意易知偶函数 $y=f(x+1)$在区间$(-\infty,0]$上单调递增，又因为 $f(x-1)=f(x-2+1)$，所以要得到函数 $f(x-1)$的图象，只需将函数 $f(x+1)$的图象向右平移 2 个单位长度，所以函数 $f(x-1)$的单调增区间是$(-\infty,2]$.

14. $x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1$，$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$，$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{4y^2}{27}=1$(写出其中一个即可) **【命题意图】**本题考查双曲线的方程，要求学生了解双曲线的性质，会根据离心率与焦距的关系求双曲线的方程.

【解题分析】由 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$得 $4c^2=7a^2$，又 $c^2=a^2+b^2$，所以 $4(a^2+b^2)=7a^2$，即 $2b=\sqrt{3}a$. 又 $c\leqslant 2\sqrt{5}$，所以$\dfrac{7a^2}{4}\leqslant 20$，得 $7a^2\leqslant 80$. 因为 a 为正整数，所以 $a=1$ 或 $a=2$ 或 $a=3$，即 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或 $b=\sqrt{3}$ 或 $b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，则双曲线方程为 $x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1$ 或$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 或$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{4y^2}{27}=1$.

15. 15120 **【命题意图】**本题考查计数原理，要求学生通过实例，理解排列、组合的概念，能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式.

【解题分析】4 副长联内容不同，赠送方法有 $A_4^4=24$ 种；从剩余的 7 副短联中选出 1 副赠送给乙户老人，有 $A_7^1=7$ 种方法，再将剩余的 6 副短联平均分为 3 组，最后将这 3 组赠送给三户老人，方法种数为$\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=C_6^2C_4^2C_2^2=90$. 所以所求方法种数为 $24\times7\times90=15120$.

16. $4\sqrt{2}+2$ **【命题意图】**本题结合生活实际情景考查空间几何体，要求学生了解空间几何体的结构特征，会根据生活实际情境解决路线最短问题.

【解题分析】只需考虑蚂蚁行进的三条路径，并沿所经过的棱将路径图展开成平面图，第一条路径是穿过棱 ON，此时最短路线长为 $EN+NF=4+4=8$；第二条路径是穿过棱 EN 和棱 NF，此时最短路线长为$\sqrt{2}(ME+CE)=\sqrt{2}(4+\sqrt{2})=4\sqrt{2}+2$；第三条路径是穿过棱 EN 和棱 MF，

此时最短路线长为$\sqrt{(CE+EM+FD)^2+EN^2}=\sqrt{(\sqrt{2}+4+\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{40+16\sqrt{2}}$.

通过比较可知,$4\sqrt{2}+2$ 最小.

17.**【命题意图】**本题考查解三角形,要求学生掌握正、余弦定理,会根据正、余弦定理求解有关三角形边、角问题.

【解题分析】(1)由已知可得 $2c-b=\sqrt{3}a\sin C-a\cos C$,即 $2c+a\cos C=b+\sqrt{3}a\sin C$,…… 1 分

可得 $2\sin C+\sin A\cos C=\sin B+\sqrt{3}\sin A\sin C$, …… 2 分

即 $2\sin C+\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sqrt{3}\sin A\sin C$, …… 3 分

即 $2\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C+\cos A\sin C$,即 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$. …… 4 分

因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …… 5 分

(2)由已知得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{3}{4}\tan A=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,又 $b=1$, …… 7 分

所以 $c=3$, …… 8 分

故 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7$, …… 9 分

解得 $a=\sqrt{7}$. …… 10 分

18.**【命题意图】**本题考查统计案例,要求学生理解独立性检验在判断相关变量之间是否有关系中的意义,会根据实例进行求解.

【解题分析】(1)列联表为

	运动达标	运动不达标	总计
男生	160	60	220
女生	100	80	180
总计	260	140	400

…… 2 分

因为 $\chi^2=\frac{400\times(160\times80-100\times60)^2}{260\times140\times220\times180}\approx12.832>10.828$, …… 5 分

所以能在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下认为"运动达不达标与性别有关". …… 6 分

(2)由(1)知,运动不达标的男生、女生人数分别是 60,80,按照分层抽样共抽取 7 人,则男生、女生分别抽取 3 人,4 人. 从这 7 人中任选 4 人,则女生人数 $\xi=1,2,3,4$. …… 8 分

则 $P(\xi=1)=\frac{C_3^3C_4^1}{C_7^4}=\frac{4}{35}$,$P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_4^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$,

$P(\xi=3)=\frac{C_3^1C_4^3}{C_7^4}=\frac{12}{35}$,$P(\xi=4)=\frac{C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35}$.

所以 $P(\xi)$的最大值为 $P(\xi=2)=\frac{18}{35}$,$\xi_0=2$. …… 12 分

19.**【命题意图】**本题考查立体几何,要求学生理解空间点、线、面的关系,会进行线、面位置关系的判断和点面距的计算.

【解题分析】(1)$\because DA\perp$平面 ABC,平面 $ABC/\!/$平面 $DEFG$, ······ 1 分

$\therefore DA\perp$平面 $DEFG$,$\therefore DA\perp GE$. ······ 2 分

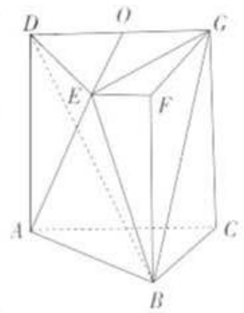
$\because GE\perp DE$,$AD\cap DE=D$,$AD\subset$平面 ADE,$DE\subset$平面 ADE, ······ 3 分

$\therefore GE\perp$平面 ADE. $\because AE\subset$平面 ADE, ······ 4 分

$\therefore AE\perp GE$. ······ 5 分

(2)如图,$\because O$ 是 DG 的中点,$OE/\!/$平面 $BCGF$,$OE\subset$平面 $DEFG$,且平面 $DEFG\cap$平面 $BCGF=GF$,$\therefore OE/\!/GF$,$\because\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore\angle DOE=\angle DGF=\angle ACB=45°$. ······ 6 分



又$\because AB=BC=\sqrt{2}$,侧面 $ACGD$ 是正方形,

$\therefore AC=CG=2$,$OE=\frac{1}{2}DG=1$,

$\therefore$点 E 到 DG 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$, ······ 7 分

$\therefore S_{\triangle DEG}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $V_{B-DEG}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times2=\frac{\sqrt{2}}{3}$. ······ 8 分

又 $BC=\sqrt{2}$,$GC=2$,$\therefore BG=BD=\sqrt{6}$,$OB=\sqrt{5}$, ······ 9 分

$\therefore S_{\triangle BGD}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$, ······ 10 分

设点 E 到平面 BDG 的距离为 h,由 $V_{B-DEG}=V_{E-BDG}$, ······ 11 分

得$\frac{1}{3}\times\sqrt{5}\times h=\frac{\sqrt{2}}{3}$,解得 $h=\frac{\sqrt{10}}{5}$. 所以直线 OE 与平面 BDG 所成角的正弦值为$\frac{h}{OE}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

······ 12 分

20.【命题意图】本题考查数列综合,要求学生掌握数列的前 n 项和与构造数列的关系,会进行等比数列的判断.

【解题分析】 选择①②为条件,③为结论.

证明过程如下:

设等比数列$\{a_n+1\}$的公比为 $q(q>0$ 且 $q\neq1)$,则 $a_n+1=(a_1+1)q^{n-1}$, ······ 2 分

由 $a_2=2a_1+1$ 得 $a_2+1=2(a_1+1)$,所以 $q=2$, ······ 4 分

则 $a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}$,即 $a_n=(a_1+1)2^{n-1}-1$, ······ 5 分

所以 $S_n=\frac{(a_1+1)(1-2^n)}{1-2}-n$,即 $S_n=(a_1+1)(2^n-1)-n$, ······ 6 分

所以 $S_n+n+a_1+1=2(a_1+1)\cdot2^{n-1}$, ······ 10 分

所以$\{S_n+n+a_1+1\}$是以 $2(a_1+1)$为首项,2 为公比的等比数列. ······ 12 分

选择①③为条件,②为结论.

证明过程如下:

设等比数列$\{a_n+1\}$的公比为 $q(q>0$ 且 $q\neq1)$,则 $a_n+1=(a_1+1)q^{n-1}$,

所以 $a_2+1=(a_1+1)q$, (*) ······ 2 分

因为$\{S_n+n+a_1+1\}$是等比数列，

所以$(S_2+2+a_1+1)^2=(S_1+1+a_1+1)(S_3+3+a_1+1)$，………………………… 4 分

即$[2(a_1+1)+a_2+1]^2=2(a_1+1)[2(a_1+1)+a_2+1+a_3+1]$，

所以$[2(a_1+1)+(a_1+1)q]^2=2(a_1+1)[2(a_1+1)+(a_1+1)q+(a_1+1)q^2]$. …………… 6 分

因为$a_1+1\neq0$，所以化简整理得$(2+q)^2=2(2+q+q^2)$，

即$q^2-2q=0$，因为$q>0$，所以$q=2$，………………………………………… 10 分

代入(＊)式，得$a_2+1=2(a_1+1)$，即$a_2=2a_1+1$. ………………………………… 12 分

选择②③为条件，①为结论.

证明过程如下：

设等比数列$\{S_n+n+a_1+1\}$的公比为$q_1(q_1>0$且$q_1\neq1)$，

则$S_n+n+a_1+1=(S_1+1+a_1+1)q_1^{n-1}=2(a_1+1)q_1^{n-1}$，……………………… 2 分

当$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2(a_1+1)q_1^{n-1}-2(a_1+1)q_1^{n-2}-1=2(a_1+1)q_1^{n-2}(q_1-1)-1$，……

……………………………………………………………………………… 4 分

所以$a_2=2(a_1+1)(q_1-1)-1$，………………………………………………… 6 分

又因为$a_2=2a_1+1$，所以$2(a_1+1)=2(a_1+1)(q_1-1)$，因为$a_1+1\neq0$，所以$q_1=2$，…… 8 分

所以$a_n=2(a_1+1)2^{n-2}-1=(a_1+1)2^{n-1}-1$，

得$a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}$，…………………………………………………… 10 分

因为当$n=1$时，上式恒成立，……………………………………………… 11 分

所以$\{a_n+1\}$是首项为a_1+1，公比为2的等比数列. ……………………………… 12 分

21.**【命题意图】**本题考查直线与抛物线综合，要求学生掌握直线的方程，理解抛物线的性质，并能联立直线与抛物线的方程求解有关距离最值问题.

【解题分析】(1)直线方程为$x=4$，将其代入抛物线可得$y=\pm2\sqrt{2p}$，………………… 2 分

由已知得$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2p}=8\sqrt{6}$，解得$p=3$. ……………………… 3 分

故抛物线T的方程为$y^2=6x$. ……………………………………………… 5 分

(2)因为$E(a,0)$，若直线AB，CD分别与两坐标轴垂直，

则直线AB，CD中有一条与抛物线只有一个交点，不合题意，

所以直线AB，CD的斜率均存在且不为0. 设直线AB的斜率为$k(k\neq0)$，

则直线AB的方程为$y=k(x-a)$. ……………………………………………… 6 分

联立$\begin{cases}y^2=6x\\y=k(x-a)\end{cases}$，得$ky^2-6y-6ka=0$，则$\Delta=36+24k^2a>0$，…………………… 7 分

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=\frac{6}{k}$，设$H(x_H,y_H)$，则$y_H=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{3}{k}$，则$x_H=\frac{y_H}{k}+a=\frac{3}{k^2}+a$，…………… 8 分

所以$H(\frac{3}{k^2}+a,\frac{3}{k})$，同理可得$K(3k^2+a,-3k)$，………………………………… 9 分

故$|HK|=\sqrt{(3k^2-\frac{3}{k^2})^2+(-3k-\frac{3}{k})^2}=\sqrt{9k^4+\frac{9}{k^4}+9k^2+\frac{9}{k^2}}\geqslant3\sqrt{2\sqrt{k^4\times\frac{1}{k^4}}+2\sqrt{k^2\times\frac{1}{k^2}}}$

$=6$, ………………………………………………………………………… 10 分

当且仅当$k^4=\frac{1}{k^4}$且$k^2=\frac{1}{k^2}$,即$k=\pm1$时等号成立. ………………………………… 11 分

故$|HK|$的最小值为 6. ………………………………………………………………… 12 分

22.**【命题意图】**本题考查导数与不等式,要求学生理解导数的应用,会根据函数的单调性构造不等关系进行不等式的证明.

【解题分析】(1)由已知得$f(x)=a\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$,$x\in(0,+\infty)$,$a>0$. ……………………… 2 分

则$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2-4x}{x(x+1)^2}$. …………………………………………… 3 分

因为$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$a(x+1)^2-4x\geqslant0$恒成立. ………………………… 4 分

即$a\geqslant\frac{4x}{(x+1)^2}=\frac{4}{x+2+\frac{1}{x}}$,易知$\frac{4}{x+2+\frac{1}{x}}\leqslant\frac{4}{2+2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}}=1$,当且仅当$x=1$时取等号. …

………………………………………………………………………………… 5 分

所以$a\geqslant1$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知当$a=1$,$x\in(1,+\infty)$时,$f(x)>f(1)=0$,即$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$. …………… 7 分

即$\ln\sqrt{x}>\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$,可得$\ln x>\frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$. …………………………………… 8 分

令$x=1+\frac{1}{n}$,则$\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{4(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=4\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,即$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{4}\ln\frac{n+1}{n}$.

………………………………………………………………………………… 10 分

所以$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{4}(\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n})=\frac{1}{4}\ln(n+1)$, …

………………………………………………………………………………… 11 分

即$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{4}\ln(n+1)$. ………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。