2023 届高三第二次调研测试

数学参考答案与讲评建议

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 M，N 是 U 的非空子集，$M\cap N=M$，则

A．$M\subseteq N$　　B．$N\subseteq M$　　C．$\complement_U M=N$　　D．$\complement_U N=M$

【答案】A

2. 若 $\mathrm{i}z=(1-2\mathrm{i})^2$，则 $z=$

A．$4+3\mathrm{i}$　　B．$4-3\mathrm{i}$　　C．$-4+3\mathrm{i}$　　D．$-4-3\mathrm{i}$

【答案】C

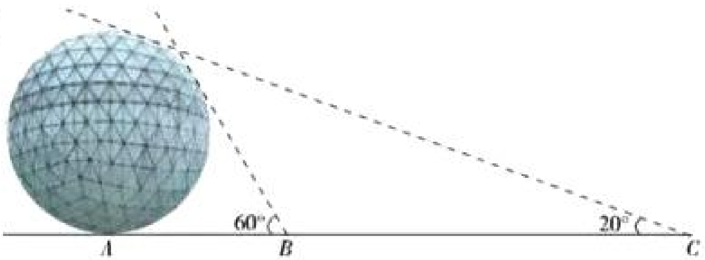
3. 已知$(x^3+\dfrac{2}{x^2})^n$的展开式中各项系数和为 243，则展开式中常数项为

A．60　　B．80　　C．100　　D．120

【答案】B

4. 古代数学家刘徽编撰的《重差》是中国最早的一部测量学著作，也为地图学提供了数学

基础．现根据刘徽的《重差》测量一个球体建筑物的高度，已知点 A 是球体建筑物与水平地面的接触点（切点），地面上 B，C 两点与点 A 在同一条直线上，且在点 A 的同侧．若在 B，C 处分别测得球体建筑物的最大仰角为 60°和 20°，且 $BC=100$ m，则该球体建筑物的高度约为（$\cos10°\approx0.985$）



A．49.25 m　　B．50.76 m

C．56.74 m　　D．58.60 m

【答案】B

5. 在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$．若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{DF}+n\overrightarrow{AE}$，则 $m+n=$

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{5}{6}$　　D．$\frac{4}{3}$

【答案】D

6. 记函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$的最小正周期为$T$. 若$\frac{\pi}{2}<T<\pi$，且$f(x)\leqslant|f(\frac{\pi}{3})|$，则$\omega=$

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{15}{4}$　　D. $\frac{27}{4}$

【答案】C

7. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$y=f(x)+e^x$是偶函数，$y=f(x)-3e^x$是奇函数，则$f(x)$的最小值为

A. e　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2e$

【答案】B

8. 已知F_1，F_2分别是双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，点$P$在双曲线上，$PF_1\perp PF_2$，圆$O$：$x^2+y^2=\frac{9}{4}(a^2+b^2)$，直线$PF_1$与圆$O$相交于$A$，$B$两点，直线$PF_2$与圆$O$相交于$M$，$N$两点．若四边形$AMBN$的面积为$9b^2$，则$C$的离心率为

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{8}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

【答案】D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知甲种杂交水稻近五年的产量（单位：t/hm^2）数据为：9.8，10.0，10.0，10.0，10.2，乙种杂交水稻近五年的产量（单位：t/hm^2）数据为：9.6，9.7，10.0，10.2，10.5，则

A. 甲种的样本极差小于乙种的样本极差

B. 甲种的样本平均数等于乙种的样本平均数

C. 甲种的样本方差大于乙种的样本方差

D. 甲种的样本 60 百分位数小于乙种的样本 60 百分位数

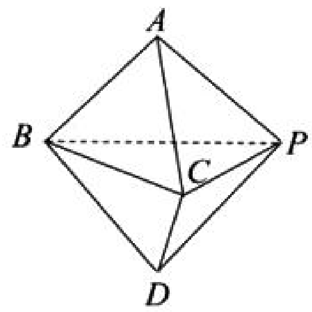
【答案】ABD

10. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_n=\begin{cases}2n-13, & 1\leqslant n\leqslant 6,\\(-3)^{n-7}-1, & n>6.\end{cases}$ 若$S_k=-32$，则k可能为

A. 4　　B. 8　　C. 9　　D. 12

【答案】AC

11. 如图，正三棱锥 $A-PBC$ 和正三棱锥 $D-PBC$ 的侧棱长均为 $\sqrt{2}$，$BC=2$．若将正三棱锥 $A-PBC$ 绕 BC 旋转，使得点 A，P 分别旋转至点 A'，P' 处，且 A'，B，C，D 四点共面，点 A'，D 分别位于 BC 两侧，则



A．$A'D\perp CP$

B．PP' //平面 $A'BDC$

C．多面体 $PP'A'BDC$ 的外接球的表面积为 6π

D．点 A，P 旋转运动的轨迹长相等

【答案】BC

12. 已知 $a>0$，$e^a+\ln b=1$，则

A．$a+\ln b<0$　　B．$e^a+b>2$　　C．$\ln a+e^b<0$　　D．$a+b>1$

【答案】ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知点 P 在抛物线 C：$y^2=2px\,(p>0)$上，过 P 作 C 的准线的垂线，垂足为 H，点 F 为 C 的焦点．若 $\angle HPF=60°$，点 P 的横坐标为 1，则 $p=$_______．

【答案】$\frac{2}{3}$

14. 过点$(-1,\ 0)$作曲线 $y=x^3-x$ 的切线，写出一条切线的方程_______．

【答案】$2x-y+2=0$，答案不唯一，$x+4y+1=0$ 也正确

15. 已知一扇矩形窗户与地面垂直，高为 1.5 m，下边长为 1 m，且下边距地面 1 m．若某人观察到窗户在平行光线的照射下，留在地面上的影子恰好为矩形，其面积为 1.5 m^2，则窗户与地面影子之间光线所形成的几何体的体积为_______ m^3．

【答案】$\frac{21}{8}$

16. "完全数"是一类特殊的自然数，它的所有正因数的和等于它自身的两倍．寻找"完全数"用到函数 $\sigma(n)$：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\sigma(n)$为 n 的所有正因数之和，如 $\sigma(6)=1+2+3+6=12$，则 $\sigma(20)=$_______；$\sigma(6^n)=$_______．

（第一空 2 分，第二空 3 分）

【答案】42；$\frac{1}{2}(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本题10分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin B$.

（1）若$A=\frac{\pi}{3}$，求$\cos B$;

（2）若$c=\sqrt{6}$，求$\triangle ABC$的面积.

解：（1）（方法1）因为在$\triangle ABC$中，$A=\frac{\pi}{3}$，所以$C=\pi-(A+B)=\frac{2\pi}{3}-B$.

因为$\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin B$，所以$\sin(\frac{2\pi}{3}-B)=\frac{3}{2}\sin B$,

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\frac{3}{2}\sin B$，即$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$ （*）. …… 3分

又$\sin^2 B+\cos^2 B=1$.

所以$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)^2+\cos^2 B=1$，即$\cos^2 B=\frac{4}{7}$.

又因为$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B>0$，由（*）知，$\cos B>0$,

所以$\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. …… 6分

（方法2）因为在$\triangle ABC$中，$A=\frac{\pi}{3}$,

所以$\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin B=\frac{3}{2}\sin B$,

所以由正弦定理，得$c=\frac{3}{2}b$. …… 2分

由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+\left(\frac{3}{2}b\right)^2-2b\cdot\frac{3}{2}b\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{7}{4}b^2$,

因为$a>0$，$b>0$,

所以$a=\frac{\sqrt{7}}{2}b$. …… 4分

由余弦定理，得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}b\right)^2+\left(\frac{3}{2}b\right)^2-b^2}{2\times\frac{\sqrt{7}}{2}b\times\frac{3}{2}b}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. …… 6分

（2）因为$\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin B$，由正弦定理，得$c=\sqrt{3}a\sin B$.

浙考家长帮 微信号：zjgkjzb

又因为 $c=\sqrt{6}$，所以 $a\sin B=\sqrt{2}$． …… 8 分

所以$\triangle ABC$的面积为

$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}$． …… 10 分

18. （本题 12 分）

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$S_{n+1}^2-S_n^2=8n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求 S_n；

（2）在数列$\{a_n\}$的每相邻两项 a_k，a_{k+1}之间依次插入 a_1，a_2，…，a_k，得到数列$\{b_n\}$：a_1，a_1，a_2，a_1，a_2，a_3，a_1，a_2，a_3，a_4，……，求$\{b_n\}$的前 100 项和．

解：（1）因为 $S_{n+1}^2-S_n^2=8n$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n^2=\left(S_n^2-S_{n-1}^2\right)+\cdots+\left(S_2^2-S_1^2\right)+S_1^2$

$=8(n-1)+\cdots+8\times1+1$ …… 2 分

$=8\left[1+2+3+\cdots+(n-1)\right]+1$

$=8\times\frac{n(n-1)}{2}+1$

$=(2n-1)^2$， …… 4 分

因为 $a_n>0$，所以 $S_n>0$，

所以 $S_n=2n-1$．

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$ 适合上式，

所以 $S_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$． …… 6 分

（2）（方法 1）因为 $S_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)-(2n-3)=2$．

所以 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2, & n\geqslant 2.\end{cases}$ …… 8 分

所以数列$\{b_n\}$：1，1，2，1，2，2，1，2，2，2，……，

设 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\leqslant 100$，则 $n^2+n-200\leqslant 0$，

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\leqslant 13$． …… 10

分

所以$\{b_n\}$的前 100 项是由 14 个 1 与 86 个 2 组成.

所以$T_{100}=14\times1+86\times2=186$. …… 12 分

（方法 2）设$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\leqslant100$，则$n^2+n-200\leqslant0$，

因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n\leqslant13$. …… 8

分

根据数列$\{b_n\}$的定义，知

$$T_{100}=a_1+(a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{13})+(a_1+a_2+\cdots+a_9)$$

$=S_1+S_2+S_3\cdots+S_{13}+S_9$ …… 10 分

$=(1+3+5\cdots+25)+17$

$=\dfrac{13\times(1+25)}{2}+17$

$=186$. …… 12 分

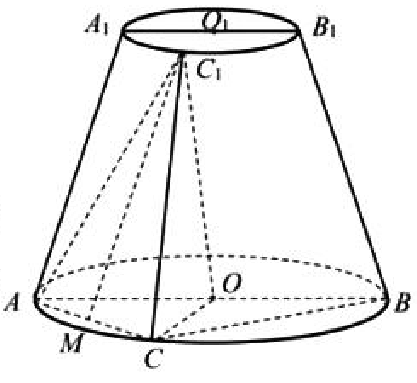
19. （本题 12 分）

如图，在圆台OO_1中，A_1B_1，AB分别为上、下底面直径，且$A_1B_1/\!/AB$，$AB=2A_1B_1$，CC_1为异于AA_1，BB_1的一条母线.

（1）若M为AC的中点，证明：$C_1M/\!/$平面ABB_1A_1；

（2）若$OO_1=3$，$AB=4$，$\angle ABC=30°$，求二面角$A-C_1C-O$的正弦值.

证明：（1）如图，连接A_1C_1.



因为在圆台OO_1中，上、下底面直径分别为A_1B_1，AB，且$A_1B_1/\!/AB$，

所以AA_1，BB_1，C_1C为圆台母线且交于一点P.

所以A，A_1，C_1，C四点共面. …… 2 分

因为在圆台OO_1中，平面$ABC/\!/$平面$A_1B_1C_1$，

平面$AA_1C_1C\cap$平面$ABC=AC$，平面$AA_1C_1C\cap$平面$A_1B_1C_1=A_1C_1$，

所以$A_1C_1/\!/AC$. …… 4 分

又因为$A_1B_1/\!/AB$，$AB=2A_1B_1$，所以$\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

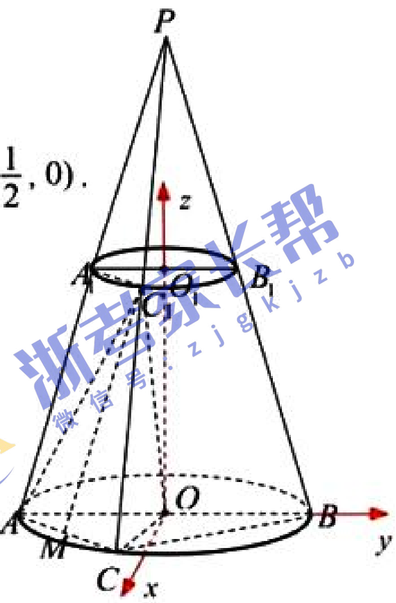
所以$\dfrac{PC_1}{PC}=\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{1}{2}$，即$C_1$为$PC$中点.

在$\triangle PAC$中，又M为AC的中点，所以$C_1M\,/\!/\,AA_1$.

因为$AA_1\subset$平面ABB_1A_1，$C_1M\not\subset$平面ABB_1A_1，

所以$C_1M\,/\!/$平面ABB_1A_1. …… 6 分

(2) 以O为坐标原点，OB，OO_1分别为y，z轴，过O且垂直于平面ABB_1A_1的直线为x轴，建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$.



因为$\angle ABC=30^\circ$，所以$\angle AOC=60^\circ$.

则$A(0,-2,0)$，$C(\sqrt{3},-1,0)$，$O_1(0,\ 0,\ 3)$.

因为$\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},-1,0)$，所以$\overrightarrow{O_1C_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0)$.

所以$C_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},3\right)$，所以$\overrightarrow{C_1C}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},-3\right)$.

设平面OCC_1的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{OC},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{C_1C},\end{cases}$ 所以$\begin{cases}\sqrt{3}x_1-y_1=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1-\dfrac{1}{2}y_1-3z_1=0,\end{cases}$

所以平面OCC_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},0)$. …… 8 分

又$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，

设平面ACC_1的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{AC},\\ \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{C_1C},\end{cases}$ 所以$\begin{cases}\sqrt{3}x_2+y_2=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2-\dfrac{1}{2}y_2-3z_2=0,\end{cases}$

所以平面ACC_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=\left(1,-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. …… 10 分

所以$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1\times1+\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}\right)+0\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+3}\times\sqrt{1+3+\dfrac{1}{3}}}=-\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

设二面角$M-C_1C-O$的大小为θ，

所以$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>}=\dfrac{\sqrt{130}}{13}$.

所以二面角 $M-C_1C-O$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{130}}{13}$.　　　　　　　　　　…… 12 分

20. (本题 12 分)

我国风云系列卫星可以监测气象和国土资源情况．某地区水文研究人员为了了解汛期人工测雨量 x（单位：dm）与遥测雨量 y（单位：dm）的关系，统计得到该地区 10 组雨量数据如下：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人工测雨量 x_i	5.38	7.99	6.37	6.71	7.53	5.53	4.18	4.04	6.02	4.23
遥测雨量 y_i	5.43	8.07	6.57	6.14	7.95	5.56	4.27	4.15	6.04	4.49
$\lvert x_i-y_i\rvert$	0.05	0.08	0.2	0.57	0.42	0.03	0.09	0.11	0.02	0.26

并计算得 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=353.6$，$\sum_{i=1}^{10}y_i^2=361.7$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=357.3$，$\overline{x}^2\approx 33.62$，$\overline{y}^2\approx 34.42$，$\overline{x}\,\overline{y}\approx 34.02$.

(1) 求该地区汛期遥测雨量 y 与人工测雨量 x 的样本相关系数（精确到 0.01），并判断它们是否具有线性相关关系；

(2) 规定：数组 (x_i, y_i) 满足 $\lvert x_i-y_i\rvert<0.1$ 为“Ⅰ类误差”；满足 $0.1\leqslant\lvert x_i-y_i\rvert<0.3$ 为“Ⅱ类误差”；满足 $\lvert x_i-y_i\rvert\geqslant 0.3$ 为“Ⅲ类误差”．为进一步研究，该地区水文研究人员从“Ⅰ类误差”、“Ⅱ类误差”中随机抽取 3 组数据与“Ⅲ类误差”数据进行对比，记抽到“Ⅰ类误差”的数据的组数为 X，求 X 的概率分布与数学期望．

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{304.5}\approx 17.4$.

解：(1) 因为 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2)\times(\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\overline{y}^2)}}$，　…… 2 分

代入已知数据，

得 $r=\dfrac{357.3-10\times34.02}{\sqrt{(353.6-10\times33.62)\times(361.7-10\times34.42)}}=\dfrac{17.1}{\sqrt{304.5}}\approx0.98$.

所以汛期遥测雨量 y 与人工测雨量 x 有很强的线性相关关系. …… 4 分

(2) 依题意，“I 类误差”有 5 组，“II 类误差”有 3 组，“III 类误差”有 2 组.

若从“I 类误差”和“II 类误差”数据中抽取 3 组，抽到“I 类误差”的组数 X 的所有可能取值为 0，1，2，3. …… 6 分

则 $P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$,

$P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$,

$P(X=3)=\dfrac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}=\dfrac{5}{28}$. …… 10 分

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{56}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{5}{28}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=1\times\dfrac{15}{56}+2\times\dfrac{15}{28}+3\times\dfrac{5}{28}=\dfrac{15}{8}$. …… 12 分

另解：因为 $X\sim H(3,5,8)$，所以 $E(X)=\dfrac{3\times5}{8}=\dfrac{15}{8}$. …… 12 分

21. (本题 12 分)

已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2，过 E 的左焦点 F 的直线 l 与 E 相交于 A，B 两点，与直线 $x=-2$ 相交于点 M.

(1) 若 $M(-2,\ -1)$，求证：$|MA|\cdot|BF|=|MB|\cdot|AF|$;

(2) 过点 F 作直线 l 的垂线 m 与 E 相交于 C，D 两点，与直线 $x=-2$ 相交于点 N. 求 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}+\dfrac{1}{|NC|}+\dfrac{1}{|ND|}$ 的最大值.

解：(1) 设 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，

因为焦距为 2，所以 $2c=2$，解得 $c=1$.

又因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，所以 $b^2=a^2-c^2=2-1=1$，

所以椭圆 E：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …… 2

分

因为直线 l 经过 $M(-2,-1)$，$F(-1,0)$，所以直线 l 方程为 $y=x+1$，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，联立 $\begin{cases} y=x+1, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $3x^2+4x=0$.

（方法 1）由 $3x^2+4x=0$，得 $x_1=-\frac{4}{3}$，$x_2=0$. …… 4 分

所以 $|MA|\cdot|BF|=\sqrt{(x_1+2)^2+(y_1+1)^2}\sqrt{(x_2+1)^2+(y_2-0)^2}$

$$=2|x_1+2||x_2+1|=2\times\left|-\frac{4}{3}+2\right|\times|0+1|=\frac{4}{3},$$

同理，得 $|MB|\cdot|AF|=2|x_2+2|\cdot|x_1+1|=2\times|0+2|\times\left|-\frac{4}{3}+1\right|=\frac{4}{3}$.

所以 $|MA|\cdot|BF|=|MB|\cdot|AF|$. …… 6 分

（方法 2）由 $3x^2+4x=0$，得 $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{4}{3}, \\ x_1x_2=0. \end{cases}$ …… 4 分

因为 $|MA|\cdot|BF|=\sqrt{2}|x_1+2|\cdot\sqrt{2}|x_2+1|=2|x_1+2x_2+2|=2\left|-\frac{4}{3}+x_2+2\right|=2\left|x_2+\frac{2}{3}\right|$，

同理，得 $|MB|\cdot|AF|=2|x_2+2x_1+2|=2\left|x_2+2\left(-\frac{4}{3}-x_2\right)+2\right|=2\left|x_2+\frac{2}{3}\right|$，

所以 $|MA|\cdot|BF|=|MB|\cdot|AF|$. …… 6 分

(2) 由题设知，直线 l 的斜率存在,且不为 0.

设直线 l 方程为 $y=k(x+1)$，直线 m 方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+1)$，其中 $k\neq 0$.

联立 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

所以$\begin{cases}\Delta=16k^4-4(2k^2+1)(2k^2-2)=8k^2+8>0, \\ x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}, \\ x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}.\end{cases}$

因为$M(-2,-k)$，所以$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}|x_1+2|}+\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}|x_2+2|}$.

因为$x_1>-2$, $x_2>-2$,

所以$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(\dfrac{1}{x_1+2}+\dfrac{1}{x_2+2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\dfrac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$.

…… 8 分

所以$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\dfrac{-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}+4}{\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}+\dfrac{-8k^2}{1+2k^2}+4}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\dfrac{4k^2+4}{2k^2+2}=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$.

…… 10 分

同理，得$\dfrac{1}{|NC|}+\dfrac{1}{|ND|}=\dfrac{2}{\sqrt{1+(-\frac{1}{k})^2}}=\dfrac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

所以$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}+\dfrac{1}{|NC|}+\dfrac{1}{|ND|}=\dfrac{2(1+|k|)}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{\dfrac{k^2+1+2|k|}{k^2+1}}$

$\leqslant2\sqrt{\dfrac{2(k^2+1)}{k^2+1}}=2\sqrt{2}$（当且仅当$|k|=1$，即$k=\pm1$时，取“=”）.

所以$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}+\dfrac{1}{|NC|}+\dfrac{1}{|ND|}$的最大值为$2\sqrt{2}$. …… 12 分

22. (本题 12 分)

已知函数$f(x)=ax-\ln x-\dfrac{a}{x}$.

(1) 若$x>1$，$f(x)>0$，求实数a的取值范围；

(2) 设x_1，x_2是函数$f(x)$的两个极值点，证明：$|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a}$.

解：依题意，$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{ax^2-x+a}{x^2}(x>0)$. …… 1 分

(1) ① 当 $a\leqslant 0$ 时，$x>1$，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)<f(1)=0$，所以 $a\leqslant 0$ 不符合题设. …… 2 分

② 当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $ax^2-x+a=0$，

解得 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\in(0,1)$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\in(1,+\infty)$，

所以当 $x\in(1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,x_2)$ 上单调递减，

所以 $f(x)<f(1)=0$，所以 $0<a<\frac{1}{2}$ 不符合题设. …… 4 分

③ 当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，判别式 $\mathrm{V}=1-4a^2\leqslant 0$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(1)=0$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. …… 6 分

(2) 由（1）知，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，

$f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 x_1 是 $f(x)$ 的极大值点，x_2 是 $f(x)$ 的极小值点.

由（1）知，$x_1x_2=1$，$x_1+x_2=\dfrac{1}{a}$，$x_2-x_1=\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a}$.

所以要证 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a}$，只要证 $f(x_1)-f(x_2)<x_2-x_1$. …… 8 分

因为 $x_2-x_1-f(x_1)+f(x_2)=(a+1)(x_2-x_1)-\ln\dfrac{x_2}{x_1}+a\cdot\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}$

$$=2a(x_2-x_1)+(x_2-x_1)-\ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}+\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}}-\ln\frac{x_2}{x_1}$$

$$=\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\ln\frac{x_2}{x_1},$$

设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，$g(t)=\dfrac{2(t-1)}{t+1}+\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\ln t$. …… 10 分

所以$g'(t)=\frac{4}{(t+1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}-\frac{1}{t}=\frac{4}{(t+1)^2}+\frac{\left(\sqrt{t}-1\right)^2}{2t\sqrt{t}}>0$，

所以$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$g(t)>g(1)=0$．

所以$x_2-x_1-f(x_1)+f(x_2)>0$，即得$f(x_1)-f(x_2)<x_2-x_1$成立．

所以原不等式成立． …… 12 分