2024届高三年级10月份大联考

数学试题

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $\forall x\in(0,1)$，$\sin x>x-x^2$ 的否定为

A. $\exists x\notin(0,1)$，$\sin x\leqslant x-x^2$　　B. $\exists x\in(0,1)$，$\sin x\leqslant x-x^2$

C. $\forall x\notin(0,1)$，$\sin x>x-x^2$　　D. $\forall x\in(0,1)$，$\sin x\leqslant x-x^2$

2. 若集合 $M=\{y|y=\ln(4-x^2)\}$，$N=[-2,2]$，则 $M\cap N=$

A. $[-2,2]$　　B. $(-2,2)$　　C. $(-\infty,2]$　　D. $[-2,\ln 4]$

3. 若 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，则 $2x+\frac{1}{2x-1}$ 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

4. 下列函数既是奇函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $f(x)=|x|$　　B. $f(x)=x^2+1$

C. $f(x)=x^3-x$　　D. $f(x)=x^3+x$

5. $\sum\limits_{n=1}^{2\,023}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$

A. $\frac{2\,021}{4\,050}$　　B. $\frac{2\,022}{4\,050}$　　C. $\frac{2\,023}{4\,050}$　　D. $\frac{2\,024}{4\,050}$

6. 碳14是碳元素的一种同位素，具有放射性. 活体生物其体内的碳14含量大致不变，当生物死亡后，其组织内的碳14开始衰变并逐渐消失. 已知碳14的半衰期为5 730年，即生物死亡 t 年后，碳14所剩质量 $C(t)=C_0\left(\frac{1}{2}\right)$，其中 C_0 为活体组织中碳14的质量. 科学家一般利用碳14这一特性测定生物死亡年代. 2023年科学家发现某生物遗体中碳14含量约为原始质量的0.4倍，依据计算结果可推断该生物死亡的时间约为公元前（参考数据：$\lg 2\approx0.301\,0$）

A. 5 554年　　B. 5 546年　　C. 7 576年　　D. 7 577年

7. 命题 p：函数 $y=f(x)$ 的最大值为 M，函数 $y=g(x)$ 的最小值为 m；命题 q：$y=f(x)-g(x)$ 的最大值为 $M-m$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

8. 若函数 $f(x)=3\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi)$ 上恰有9个极值点，则 ω 的取值范围为

A. $\left[\frac{13}{3},\frac{29}{6}\right)$　　B. $\left(\frac{13}{3},\frac{29}{6}\right]$　　C. $\left(\frac{26}{3},\frac{29}{6}\right]$　　D. $[3,5)$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．已知 $x>y>1$，则

A．$\lg(x^2-1)>\lg(y^2-1)$　　B．$\sin x>\sin y$

C．$x^3>y^3$　　D．$2^{-x}>2^{-y}$

10．若函数 $f(x)=x^3e^x$，则

A．$f(x)$是奇函数　　B．$f(x)$有2个极值点

C．$f(x)$有1个零点　　D．$f(x)$的一条切线方程为 $y=4ex-3e$

11．已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in[0,\pi])$，则

A．若 $f(0)=\sqrt{3}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$

B．若函数 $y=f(x)$为偶函数，则 $\cos^2\varphi=1$

C．若 $f(x)$在$[a,b]$上单调，则 $b-a\leqslant\frac{\pi}{2\omega}$

D．若 $\varphi=\frac{\pi}{2}$时，且 $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上单调，则 $\omega\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$

12．若 $a=\ln b+1$，$c=e^a-1$，则

A．$a\leqslant b$　　B．$c\leqslant b$　　C．$a<c$　　D．$b<c$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．若$\{a_n\}$满足：$0<a_{n+1}<a_n<1(\forall n\in\mathbf{N}^*)$，则满足上述条件数列$\{a_n\}$的一个通项公式为________．

14．已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\in[-4,1],\\ -x+4, & x\notin[-4,1],\end{cases}$ $g(x)=f(x)-m$，若 $g(x)$有且只有3个不同的零点，则 m 的取值范围是________．

15．已知矩形和圆的面积相等，周长分别为 C_1，C_2，则$\frac{C_1}{C_2}$的取值范围为________．

16．$A=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$，$a_i\in\{-1,0,1\}(i=1,2,3,\cdots,n)$为一个有序实数组，$f(A)$表示把$A$中每个$-1$都变为$-1,0$，每个0都变为$-1,1$，每个1都变为$0,1$所得到的新的有序实数组，例如：$A=(-1,0,1)$，则 $f(A)=(-1,0,-1,1,0,1)$．定义 $A_{k+1}=f(A_k)$，$k=1,2,3,\cdots$，若 $A_1=(-1,1)$，A_n中有b_n项为1，则$\{b_n\}$的前$2n$项和为________．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分10分）

已知集合 $A=\{x\mid(x+1)(x-a)<0\}$，$B=[-1,\sqrt{5})$．

（1）若 $a=\sqrt{6}$，求 $\complement_R A$，$A\cap B$ 及 $A\cup B$；

（2）若 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围．

18.（本小题满分 12 分）

(1)求方程 $\log_2 x-3\log_x 2+2=0$ 的根；

(2)若 $\forall x\in[2,16]$，$\log_2 x+a\log_x 2+3\geqslant 9$，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且满足 $b_n=3^n a_n$，$a_1=1$，$\dfrac{S_n}{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $T_n>102$，求 n 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=-\sqrt{2}$.

(1)求 $\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 的值；

(2)若 $\beta\in(0,\pi)$，求 $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 的值.

21.（本小题满分 12 分）

已知△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，D 是边 BC 上一点，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，$AD=d$，且 $2ac\sin\alpha+2ab\sin\beta=3bc$.

（1）若 $A=\frac{5\pi}{6}$，证明：$a=3d$；

（2）在（1）的条件下，且 $CD=2BD$，求 $\cos\angle ADC$ 的值.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=f(x+1)-\frac{1}{2}ax^2-x$.

（1）函数 $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$，求证：$f'(x)\leqslant 2\sqrt{x}-1$；

（2）若函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最大值，求 a 的取值范围.