乌鲁木齐地区 2023 年高三年级第三次质量监测

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1~5．DADCC　6~10．BBACD　11~12．BD

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．1　　14．-1　　15．6 或 $\frac{400}{41}$　　16．$\frac{1-4^{25}}{3}$

三、解答题

17．

(1)由余弦定理得 $2\sqrt{2}a^2\cos B=2ab\cos C+2ac\cos B$，即 $\sqrt{2}a\cos B=b\cos C+c\cos B$

再由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B$，$\therefore \sqrt{2}\sin A\cos B=\sin A$，$\because \sin A\neq 0$

$\therefore \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$　　…6 分

(2)由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin(A+B)}$　即 $c=\frac{2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin A}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{\tan A}\right)$

而 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}c=1+\frac{1}{\tan A}$

由 ΔABC 为锐角三角形，$\therefore A+\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{2}$ 且 $0<A<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{2}$

$\therefore 1+\frac{1}{\tan A}\in(1,2)$，即 $S_{\Delta ABC}\in(1,2)$．　　…12 分

18．

(1) X 的可能取值为 $3,4$

由题意当 $X=3$ 时表示日销售量为 1，此时 $P(X=3)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$，则 $P(X=4)=\frac{4}{5}$

$\therefore X$ 的分布列为

X	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

…4 分

(2)由(1)知 $P(X=4)=\frac{4}{5}$，则 Y 服从二项分布即 $Y\sim B\left(300,\frac{4}{5}\right)$.

$P(Y=k)=C_{300}^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,300)$，依题意

$$\begin{cases} C_{300}^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-k} \geq C_{300}^{k+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-(k+1)} \\ C_{300}^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-k} \geq C_{300}^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-(k-1)} \end{cases}，解得 \begin{cases} k \geq \frac{1199}{5} \\ k \leq \frac{1204}{5} \end{cases}$$

$\therefore k = 240$ 即 $P(Y=k)$ 取最大值时的 k 的值为 240.　　　　…12 分

19.

(1)证明：在 ΔABC 中，M,E 分别为 AC,BC 的中点，则 $ME \mathbin{/\!/} AB$

折叠前 $AD \perp BC$ 则折叠后 $AD \perp CD$，又 $\angle BDC = 90°$ 即 $CD \perp BD$，且 $BD \cap AD = D$

$\therefore CD \perp$ 平面 ADB，又 $AB \subset$ 平面 ADB，$\therefore CD \perp AB$ 而 $ME \mathbin{/\!/} AB$，$\therefore CD \perp ME$；…6 分

(2)设 $BD = x(0<x<3)$，则 $CD = 3-x$，$V_{A-BCD} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x(3-x)^2 = \frac{1}{6}x(3-x)^2\ (0<x<3)$

$\therefore V' = \frac{1}{2}(3-x)(1-x)$，令 $V'=0$ 解得 $x=1$，即当 $BD=1, CD=2$ 时，V_{A-BCD} 取最大,

此时 $DA = 2$.

以为 D 坐标原点，以 DB,DC,DA 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B(1,0,0), C(0,2,0), A(0,0,2), M(0,1,1), E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，设 $N(0,t,0)\ (0\le t\le 2)$

由 $EN \perp BM$ 得 $\overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ 即 $-\frac{1}{2}+1-t=0$，$\therefore t=\frac{1}{2}$，则 $N\left(0,\frac{1}{2},0\right)$

设平面 MBN 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{NB}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right), \overrightarrow{NM}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{NB}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{NM}=0\end{cases}$　即 $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=0\\ \frac{1}{2}y+z=0\end{cases}$，令 $y=2$，则 $x=1, z=-1$　所以 $\boldsymbol{m}=(1,2,-1)$

由题意可知平面 BNC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle = \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|} = \frac{-\sqrt{6}}{6}$

$\because$ 二面角 $M-BN-C$ 为锐二面角，$\therefore$ 二面角 $M-BN-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.　　　　…12 分

20.

(1)由已知 $|QA|+|QC|=|QP|+|QC|=|PC|=4$，

根据椭圆定义可得 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；　　　　…4 分

(2)设直线 MN 的方程为 $y-1=k(x+2),k<0$

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+2k+1\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，可得 $(1+4k^2)x^2+8k(2k+1)x+16k^2+16k=0$

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),y_1=kx_1+2k+1,y_2=kx_2+2k+1$

$x_1=\dfrac{-4k(2k+1)-4\sqrt{-k}}{1+4k^2},x_2=\dfrac{-4k(2k+1)+4\sqrt{-k}}{1+4k^2}$

$l_{BM}:y=\dfrac{y_1-1}{x_1}x+1$，$x_R=\dfrac{x_1}{1-y_1}$，设直线 BN 交 x 轴于点 S，同理可得 $x_S=\dfrac{x_2}{1-y_2}$

$$S_{\Delta BRN}=\frac{1}{2}|x_S-x_R|(1-y_2)=\frac{1}{2}\left|\frac{x_2}{1-y_2}-\frac{x_1}{1-y_1}\right|(1-y_2)=\frac{1}{2}\left(x_2-\frac{x_1-x_1y_2}{1-y_1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_2-x_2y_1-x_1+x_1y_2}{1-y_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_2-x_1-kx_1x_2-(2k+1)x_2+kx_1x_2+(2k+1)x_1}{-kx-2k}$$

$$=\frac{x_2-x_1}{x_1+2}=\frac{\dfrac{8\sqrt{-k}}{1+4k^2}}{\dfrac{-8k^2-4k-4\sqrt{-k}+2+8k^2}{1+4k^2}}=\frac{8\sqrt{-k}}{-4k-4\sqrt{-k}+2}$$

$$=\frac{4\sqrt{-k}}{-2k-2\sqrt{-k}+1}=\frac{4}{2\sqrt{-k}+\dfrac{1}{\sqrt{-k}}-2}\le\frac{4}{2\sqrt{2}-2}=2(\sqrt{2}+1)$$

当且仅当 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时取最大值 $2(\sqrt{2}+1)$. …12 分

21.

(1) $h(x)=x^2+\dfrac{3}{4}-\ln x$，$h'(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$，令 $h'(x)=0,x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),h'(x)<0$，$x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，$h'(x)>0$

$\therefore h(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，单调递增区间为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$； …4 分

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$x_2>x_1$，则 $x_1^2+\dfrac{3}{4}=-2x_1+t,\ln x_2=-2x_2+t$

$\therefore x_1^2+\dfrac{3}{4}+2x_1=\ln x_2+2x_2$

令 $x_2-x_1=m,m>0$，$\therefore x_1=x_2-m$，$\therefore (x_2-m)^2+\dfrac{3}{4}+2(x_2-m)=\ln x_2+2x_2$

即 $(x_2-m)^2+\dfrac{3}{4}-2m-\ln x_2=0$

令 $g(x)=(x-m)^2-\ln x+\frac{3}{4}-2m$， $g'(x)=\frac{2x^2-2mx-1}{x}$

令 $g'(x)=0$，即 $2x^2-2mx-1=0$，$\because m>0$，$\therefore \Delta=4m^2+8>0$，又 $x>0$

解得 $x_0=\frac{m+\sqrt{m^2+2}}{2}$，且 $2x_0^2-2mx_0-1=0$

当 $x\in(0,x_0),g'(x)<0$， $x\in(x_0,+\infty),g'(x)>0$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增

$\therefore$ 当 $x=x_0$ 时 $g(x)$ 取得最小值 $g(x_0)$.

要使关于 x_2 的方程 $(x_2-m)^2+\frac{3}{4}-2m-\ln x_2=0$ 有解，需 $g(x_0)\le 0$

$g(x_0)=(x_0-m)^2-\ln x_0+\frac{3}{4}-2m=\frac{1}{4x_0^2}-\ln x_0+\frac{3}{4}-2x_0+\frac{1}{x_0}$

令 $h(x)=\frac{1}{4x^2}-\ln x+\frac{3}{4}-2x+\frac{1}{x},x>0$，则 $h'(x)=-\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{x}-2-\frac{1}{x^2}<0$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减， $h(1)=0$，$\therefore x_0\in[1,+\infty)$ 时， $g(x_0)\le 0$

$\because m>0$，$\therefore e^{-2m}<1$，$\therefore g(e^{-2m})=(e^{-2m}-m)^2-\ln e^{-2m}+\frac{3}{4}-2m=(e^{-2m}-m)^2+\frac{3}{4}>0$

又因为 $\frac{m+\sqrt{m^2+2}}{2}<\frac{m+m+2}{2}<2m+1$，$\therefore g(2m+1)=m^2+\frac{7}{4}-\ln(2m+1)$

令 $\varphi(m)=m^2+\frac{7}{4}-\ln(2m+1),\varphi'(m)=\frac{2(m+1)(2m-1)}{2m+1}$

$m\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\varphi'(m)<0,m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right),\varphi'(m)>0$

$\therefore \varphi(m)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上递增，$\therefore \varphi(m)_{\min}=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=2-\ln 2>0$.

$\therefore g(x)$ 在 $\left(e^{-2m},1\right]$ 与 $[1,2m+1)$ 一定存在零点.

即 $m=x_0-\frac{1}{2x_0},x_0\ge 1$，且 $m=x-\frac{1}{2x}$ 在 $[1,+\infty)$ 为增函数，$\therefore m\ge\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 当 $m=\frac{1}{2}$，此时 $A\left(\frac{1}{2},1\right),B(1,0)$，$|AB|_{\min}=\sqrt{5}|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ …12 分

22.

(1)由 $\begin{cases}x'=2x\\ y'=\sqrt{3}y\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=\frac{x'}{2}\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}y'\end{cases}$，代入到 $x^2+y^2=1$ 中，得 $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{3}=1$

即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 为曲线 C' 的直角坐标方程； …5 分

(2)设 $P\left(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta\right)$，则点 P 到直线 $l:\sqrt{3}x+y-6=0$ 的距离为

$$d=\frac{\left|2\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-6\right|}{2}=\frac{\left|\sqrt{15}\sin\left(\theta+\varphi\right)-6\right|}{2}$$，其中 $\tan\varphi=2$

当 $\sin\left(\theta+\varphi\right)=1$ 时，即 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，$d=\frac{6-\sqrt{15}}{2}$

即距离最小值为 $\frac{6-\sqrt{15}}{2}$，此时点 $p\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$. …10 分

23.

(1)由 $|2x+1|\le 3x$ 得，$(2x+1)^2\le 9x^2$ 且 $x\ge 0$，解得 $x\ge 1$

即原不等式的解集 $M=[1,+\infty)$； …5 分

(2)由(1)知 $f(x)=2x+1$

$\therefore f(x)+\frac{a}{f(x)}\ge 4-a$ 即为 $2x+1+\frac{a}{2x+1}\ge 4-a\left(x\ge 1\right)$ 恒成立

则 $a\ge\frac{(3-2x)(2x+1)}{2x+2}(x\ge 1)$ 恒成立

设 $h(x)=\frac{(3-2x)(2x+1)}{2x+2}=6-2(x+1)-\frac{5}{2(x+1)}(x\ge 1)$

$\because h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)\le h(1)=\frac{3}{4}$，$\therefore a\ge\frac{3}{4}$

即正实数 a 的最小值为 $\frac{3}{4}$. …10 分