河北省“五个一”名校联盟 2024 届高二年级联考数学答案

一、单选题

1~5 $BADAC$　　　6~8 BCD

二、多选题

9、BD　　10、ACD　　11、BCD　　12、ACD

三、填空题

13、$4\pm 2i$　　14、$\sqrt{3}$　　15、$\frac{2}{3}$或2　　16、$\frac{1}{2}$

四、解答题

17、（1）证明：因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n=2n^2+5n$，

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2(n-1)^2+5(n-1)$，

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+5n-2(n-1)^2-5(n-1)=4n+3$，…………………… 2 分

当$n=1$时，$a_1=S_1=2+5=7$，所以满足$a_1=7$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=4n+3$，$n\in N^*$，…………………… 3 分

所以$a_{n+1}-a_n=4(n+1)+3-4n-3=4$，$n\in N^*$，

所以$\{a_n\}$是首项为 7，公差为 4 的等差数列.…………………… 4 分

（2）因为$b_n=16b_{n+1}$，所以$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{16}$，所以数列$\{b_n\}$是以8为首项，$\frac{1}{16}$为公比的等比数列，

所以$b_n=8\cdot(\frac{1}{16})^{n-1}=2^{7-4n}$；…………………… 5 分

所以$log_p b_n=log_p 2^{7-4n}=(7-4n)\,log_p 2$，…………………… 6 分

要使对一切正整数 n 都有$a_n=log_p b_n+q$成立.

即$4n+3=(7-4n)\,log_p 2+q$，即$4n+3=-4n\,log_p 2+7\,log_p 2+q$，

所以$\begin{cases}4=-4log_p 2\\3=7log_p 2+q\end{cases}$ …………………… 9 分

解得$\begin{cases}p=\frac{1}{2}\\q=10\end{cases}$，所以则当$p=\frac{1}{2},q=10$时，对一切正整数 n 都有$a_n=log_p b_n+q$成立.…………………… 10 分

18、（1）由正弦定理可知：$(2sinB-sinC)cosA=sinAcosC$ …………………… 2 分

所以$2sinBcosA=sinAcosC+sinCcosA=sinB$ …………………… 3 分

又$B \in (0,\pi)$，所以$sinB > 0$，所以$cosA = \frac{1}{2}$. ………………4 分

因为$A \in (0,\pi)$，所以$A = \frac{\pi}{3}$. ………………5 分

（2）$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}AD \cdot BC = \frac{1}{2}a$，所以$a = \frac{\sqrt{3}}{2}bc$　①　………………8 分

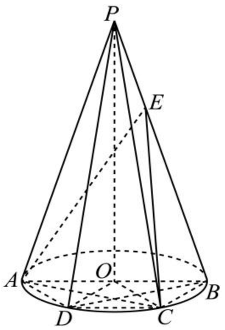
而$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos60^{\circ} = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc$ ………………9 分

所以$a^2 \geq bc$，当且仅当$b = c$时等号成立　②　……………10 分

由①②两式可知，$bc \geq \frac{4}{3}$ ……………11 分

所以$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$，即$\Delta ABC$面积的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………12 分

19、（1）由已知可得$CD \parallel AO$，且$AO = CD = 1$，



所以四边形$OADC$为平行四边形，

又因为$OA = OC = 1$，所以平行四边形$OADC$为菱形

所以$OD \perp AC$ ……………2 分

在圆锥PO中，因为$PO \perp$平面$ABCD$，$AC \subset$平面$ABCD$，

所以$PO \perp AC$ ……………3 分

因为$PO \cap OD = O$，$PO \subset$平面POD，$OD \subset$平面POD，

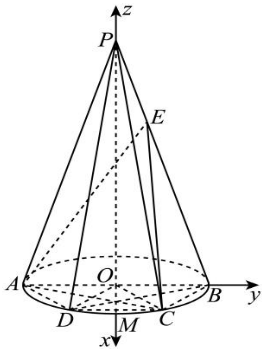
所以$AC \perp$平面POD. ……………4 分

又因为$AC \subset$平面AEC，所以平面$AEC \perp$平面POD. ……………5 分

（2）取CD中点M，易知$OM \perp$平面PAB，$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

以O为原点，OM，OB，OP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系， …………6 分

则$A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$P(0,0,3)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$， …………7 分



因为$BE=2EP$，所以$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}(0,-1,3)=\left(0,-\frac{2}{3},2\right)$，

所以$E\left(0,\frac{1}{3},2\right)$， …………8 分

所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{4}{3},2\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

设平面AEC的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$.

因为$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}\frac{4}{3}y+2z=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0.\end{cases}$，

令$y=3$，则$x=-3\sqrt{3}$，$z=-2$，所以$\vec{n}=\left(-3\sqrt{3},3,-2\right)$， …………10 分

易知平面EAB即平面yOz，所以平面EAB的一个法向量为$\vec{m}=(1,0,0)$， …………11 分

设平面AEC与平面EAB的夹角为θ，

则$\cos\theta=|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{27+9+4}\times 1}=\frac{3\sqrt{30}}{20}$，

所以平面AEC与平面EAB的夹角的余弦值为$\frac{3\sqrt{30}}{20}$. …………12 分

20、（1）定义域：（0，+∞），

$f'(x)=a+\frac{1}{x^2}-\frac{a+1}{x}=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x^2}=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$ …………1 分

$1°a<0$时 $ax-1<0$，

令$f'(x)>0$，解得$0<x<1$；令$f'(x)>0$，解得$x>1$；

所以$f(x)$在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减； …………2 分

$2°\ a>0$时

①当$\frac{1}{a}>1$时，即$0<a<1$时，令$f'(x)>0$，解得$0<x<1$或$x>\frac{1}{a}$；

令$f'(x)<0$，解得$1<x<\frac{1}{a}$；

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，（1，$\frac{1}{a}$）上单调递减，（$\frac{1}{a}$，+∞）上单调递增；………3 分

②当$\frac{1}{a}=1$时，即$a=1$时，

$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在（0，+∞）上单调递增； …………4 分

③当$\frac{1}{a}<1$时，即$a>1$ 时，令$f'(x)>0$，解得$0<x<\frac{1}{a}$或$x>1$ ；

令$f'(x)<0$，解得$\frac{1}{a}<x<1$；

所以$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增， $(\frac{1}{a},1)$上单调递减，（1，+∞）上单调递增. ………… 5 分

综上所述：当$a<0$时，$f(x)$ 在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减；

当$0<a<1$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，（1，$\frac{1}{a}$）上单调递减，（$\frac{1}{a}$，+∞）上单调递增；

当$a=1$时，$f(x)$在（0，+∞）上单调递增；

当$a>1$ 时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增， $(\frac{1}{a},1)$上单调递减，（1，+∞）上单调递增. …… 6 分

（2）由（1）知： $a>0$且$a\neq 1$

且 $g(a)=f(\frac{1}{a})+f(1)=1-a+(a+1)\ln a+a-1=(a+1)\ln a$ ……………… 7 分

即：解不等式 $(a+1)\ln a<2a-2$ ；（ $a>0$且$a\neq 1$ ）

等价于解不等式： $\ln a-\frac{2(a-1)}{a+1}<0$ ……………… 9 分

令$m(a)=\ln a-\frac{2(a-1)}{a+1}(a>0)$，

$m'(a)=\frac{1}{a}-\frac{4}{(a+1)^2}=\frac{(a-1)^2}{a(a+1)^2}>0$

所以$m(a)$在$(0,+\infty)$单调递增， …………… 11 分

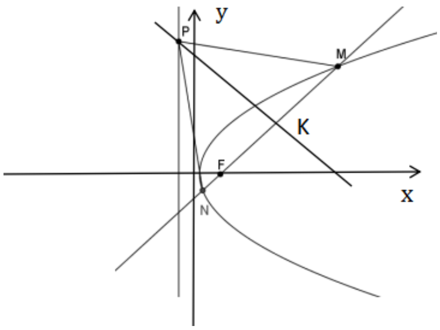
且$m(1)=0$，所以$m(a)<0=m(1)$，即不等式的解集为$\{a|0<a<1\}$. ………… 12 分

21、（1）设$C(x,y)$，则$B\left(\frac{x+2}{2},\frac{y}{2}\right)$ …………… 1 分

因为点B在抛物线$y^2=2x-2$上，即$\left(\frac{y}{2}\right)^2=2\times\frac{x+2}{2}-2$， …………… 3 分

化简得 $y^2=4x$，所以曲线E的方程为$y^2=4x$. …………… 4 分

（2）假设存在点P（-1，y_0）使ΔMNP为正三角形.



1^0 当MN垂直于y轴时，不符合题意（舍）；…5 分

2^0 当MN不垂直于y 轴时，

设直线MN：$x=my+1$，MN的中点为$K(s,t)$，

联立$\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+1 \end{cases}$ 得：$y^2-4my-4=0$

$\therefore \Delta=16m^2+16$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$ ………………………………………………………………… 6 分

$\therefore |MN|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(m^2+1)$ ………………… 7 分

$\therefore t=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$ ， $s=2m^2+1$ ………………… 8 分

$\therefore |PK|=\sqrt{1+(-m)^2}|2m^2+1-(-1)|=\sqrt{1+m^2}|2m^2+2|$ ………………… 9 分

$\because \Delta MNP$为正三角形$\therefore |MN|\times\frac{\sqrt{3}}{2}=|PK|$

即：$4(m^2+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1+m^2}|2m^2+2|$ $\therefore m=\pm\sqrt{2}$ ……………… 10 分

$PK: y-2m=-m(x-2m^2-1)$，令$x=-1$

$\therefore y_0=m(2m^2+2)+2m=m(2m^2+4)=\pm 8\sqrt{2}$ ……………… 11 分

所以存在点P（-1，$\pm 8\sqrt{2}$）使ΔMNP为正三角形. ……………… 12 分

22、解：（1）由题意，全市高中生航天创新知识竞赛成绩X近似服从正态分布$N(73,37.5)$，

则$\mu=73,\sigma=\sqrt{37.5}\approx 6.1$，所以$\mu-\sigma=66.9,\mu+2\sigma=85.2$， …………… 2 分

而$P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)+\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.815$，

……………………………………………………………………………………… 3 分

所以该市 4 万名高中生中航天创新知识竞赛成绩位于区间$(66.9,85.2)$的人数约为

$40000\times 0.815=32600$(人)； ………… 4 分

（2）由$P(X>85.2)=\frac{1-0.95}{2}=0.025$可知，

任意抽取一人，等级为优秀的概率$p=0.025$， ………… 5 分

设抽取次数为ξ，则ξ的分布列如下：

ξ	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
P	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$\cdots$	$(1-p)^{n-2}p$	$(1-p)^{n-1}$

……………………………………………………………………………… 7 分

故$E(\xi)=p+(1-p)p\times 2+(1-p)^2p\times 3+\cdots+(1-p)^{n-2}p\times(n-1)+(1-p)^{n-1}\times n$，

又$(1-p)\cdot E(\xi)=(1-p)p+(1-p)^2p\times 2+(1-p)^3p\times 3+\cdots+(1-p)^{n-1}p\times(n-1)+(1-p)^n\times n$， ………… 8 分

两式相减得：$pE(\xi)=p+(1-p)p+(1-p)^2p+\cdots+(1-p)^{n-2}p+(1-p)^{n-1}p$，

即$E(\xi)=1+(1-p)+(1-p)^2+\cdots+(1-p)^{n-2}+(1-p)^{n-1}=\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}=\frac{1-(1-p)^n}{p}=\frac{1-0.975^n}{0.025}$， ………… 10 分

而$E(\xi)=\frac{1-0.975^n}{0.025}$在$n\in N_+$时递增，

结合$0.975^5\approx 0.881$，$0.975^6=0.859$，$0.975^7=0.838$，$0.975^8=0.817$知，

当$n=5$时，$E(\xi)=4.76$；当$n=6$时，$E(\xi)=5.64$；当$n=7$时，$E(\xi)=6.48$；

所以n的最大值为 6. ………… 12 分