2023届4月高三联合测评(福建)

数　学

全卷满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并收回。
4. 本卷主要考查内容:高考范围。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $I=\{x|x\in\mathbf{N}^*,x^2<80\}$, $A=\{1,3,4,7\}$, $B=\{4,5,6,7\}$,则 $\complement_I(A\cup B)=$

A. $\{2,5,6\}$　　B. $\{1,2,3,8\}$　　C. $\{2,8\}$　　D. $\{1,3,4,5,6,7\}$

2. 若复数 $z=\dfrac{a-2i}{2+i}(a\in\mathbf{R})$, $|z|=2\sqrt{2}$, z 在复平面上对应的点在第四象限,则 $a=$

A. 6　　B. 4　　C. -4　　D. -6

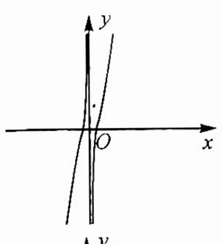
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_{10}+a_{22}=11$,则 $S_{13}=$

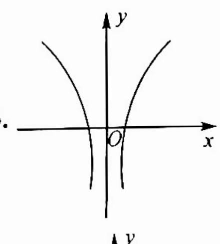
A. 11　　B. 12　　C. 13　　D. 14

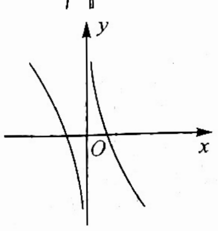
4. 已知 p: $\forall x\in[1,5]$, $x^2-4x+a-2>0$ 恒成立,则 p 的一个充分不必要条件是

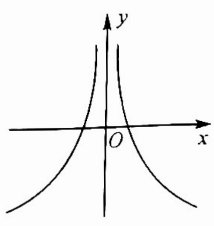
A. $a>1$　　B. $a^2>36$　　C. $2^a>64$　　D. $\log_2 a>3$

5. 函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-\dfrac{1}{x}$ 的图象大致是

A.


B.


C.


D.


6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=90°$, $AB=4$, $BC=8$, D 为 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点, $BD=\sqrt{5}$,则 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最大值为

A. $6\sqrt{10}+5$　　B. 25　　C. $4\sqrt{5}+5$　　D. $8\sqrt{5}+5$

7. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线与$\odot M$：$(x-a)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}$交于第一象限内的两点 A,B，若$\triangle MAB$为等边三角形，则双曲线的离心率 $e=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

8. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n}{a_n+n}$，$a_1+a_1a_2+\cdots+a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n<m(m\in\mathbf{R})$恒成立，则 m 的最小值为

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $a^2+1\geqslant b\geqslant 2a\geqslant\frac{4}{b}>0$，则下列结论正确的是

A. $b\geqslant 2$　　B. $a\geqslant 2$

C. $ab\geqslant 2$　　D. a^2+b^2 的最小值为 6

10. 已知$\odot O$：$x^2+y^2=1$，$\odot O_1$：$(x-2)^2+y^2=r^2(r>0)$，则下列说法正确的是

A. 若 $r=2$，两圆的公切线过点$(-2,0)$

B. 若 $r=2$，两圆的相交弦长为$\sqrt{3}$

C. 若两圆的一个交点为 M，分别过点 M 的两圆的切线相互垂直，则 $r=3$

D. 若 $r>3$ 时，两圆的位置关系为内含

11. 已知一组 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$个数据：$a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$，满足：$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n}$，平均值为 M，中位数为 N，方差为 s^2，则

A. $a_n\leqslant M\leqslant a_{n+1}$　　B. $a_n\leqslant N\leqslant a_{n+1}$

C. 函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{2n}(x-a_i)^2$ 的最小值为 $2ns^2$　　D. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$成等差数列，则 $M=N$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}+2x-(2x+1)\ln x$，则下列结论正确的是

A. $f(x)$为增函数

B. $f(x)$的最小值为$\frac{5}{2}$

C. 函数 $y=f(x)-2x$ 有且仅有两个零点

D. 若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $x_1\neq x_2$，则 $x_1+x_2>2$

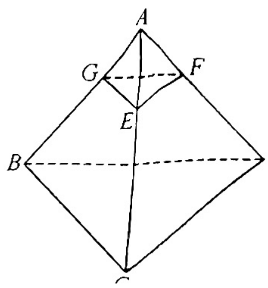
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 5 个人站成一排，小王不站两端的概率为________.

14. 已知 $\theta\in(0,2\pi)$，角 θ 的终边上有点$\left(-\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5},\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}\right)$，则 $\theta=$________.

15. 函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$的单调增区间是________.

16. 如图，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 3，E,F,G 分别是 AC,AD,AB 上的点，$AG=1,AE=1,AF=1$，截去三棱锥 $A-GEF$，同理，分别以 B,C,D 为顶点，各截去一个棱长为 1 的小三棱锥，截后所得的多面体的外接球的表面积为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$，等比数列$\{b_n\}$，满足$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_3+1=b_3$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)令$c_n=\dfrac{a_{n+2}}{a_n a_{n+1} b_{n+1}}$，求满足$c_1+c_2+\cdots+c_n>\dfrac{2022}{2023}$的最小的正整数$n$的值.

18.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$\tan A\tan B+\tan A\tan C=3\tan B\tan C$.

(1)证明：$3c^2+3b^2=5a^2$；

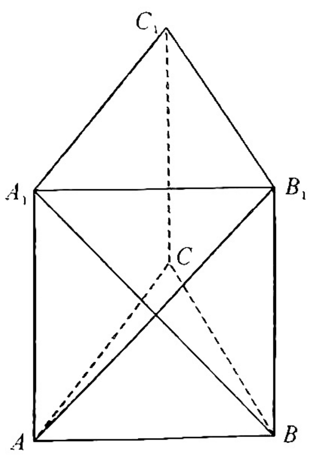
(2)若$a=\sqrt{15}$，当A取最大值时，求$\triangle ABC$的面积.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$为等边三角形，$\angle B_1BC=\angle A_1AC=60^\circ$，$AB=CC_1$.

(1)证明：$A_1B\perp$平面AB_1C；

(2)求A_1B与平面ACC_1A_1所成的角的正弦值.



20.(本小题满分 12 分)

疫情过后,某工厂快速恢复生产,该工厂生产所需要的材料价钱较贵,所以工厂一直设有节约奖,鼓励节约材料,在完成生产任务的情况下,根据每人节约材料的多少到月底发放,如果1个月节约奖不少于1000元,为“高节约奖”,否则为“低节约奖”,在该厂工作满15年的为“工龄长工人”,不满15年的为“工龄短工人”,在该厂的“工龄长工人”中随机抽取60人,当月得“高节约奖”的有20人,在“工龄短工人”中随机抽取80人,当月得“高节约奖”的有10人.

(1)若以“工龄长工人”得“高节约奖”的频率估计概率,在该厂的“工龄长工人”中任选取5人,估计下个月得“高节约奖”的人数不少于3人的概率;

(2)根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,分析得“高节约奖”是否与工人工作满15年有关.

参考数据:附表及公式:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 $M(0,2)$,右顶点为 N,直线 MN 的斜率为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,A,B,C,D 是椭圆上4个点(异于点 M),$AB/\!/CD$,直线 MA 与 MB 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{3}$,直线 MC 与 MD 的斜之和为1.

(1)证明:A,B 关于原点对称;

(2)求直线 AB 与 CD 之间的距离的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-\mathrm{e}}$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2)若 $g(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-a\sqrt{2x+1-2\mathrm{e}}-b\sqrt{2\ln x-1}$ 有零点,求 a^2+b^2 的最小值.