2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数学试题参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

1. A　　2. B　　3. D　　4. C
5. C　　6. B　　7. D　　8. D

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. BD　　10. BD　　11. BC　　12. AD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 38　　14. 0或$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　15. $[2\sqrt{2},\frac{4\sqrt{6}}{3})$　　16. $\frac{\sqrt{51\sqrt{17}+107}}{16}$

四、解答题：本题共6小题，共70分.

17. 解：

（1）$\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{15}}{5}$

（2）$AB=\sqrt{15}$

18. 解：

（1）由于$\frac{a_1}{a_2-1}\cdot\frac{a_2}{a_3-1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}-1}=n+1$，向前写一项并相除得$\frac{a_n}{a_{n+1}-1}=\frac{n+1}{n}$，从而

$(n+1)a_{n+1}=na_n-(n+1)$，累加可得$n\geqslant2$时$a_n=\frac{n+1}{2}$.

又当$n=1$时亦符合该通项，因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n+1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（2）设$b_n=(-\frac{4}{5})^n a_n$．数列$\{b_n\}$是摆动数列，所有奇数项均为负数，所有偶数项均为正数．所以若出现最大项，一定在偶数项出现；若出现最小项，一定在奇数项出现.

（i）考察奇数项$\{b_{2k-1}\}$，令$\frac{b_{2k-1}}{b_{2k+1}}=\frac{25}{16}\cdot\frac{k}{k+1}>1$，解得$k<\frac{16}{9}$，所以有

$$b_1>b_3<b_5<b_7<\cdots,$$

这表明数列$\{(-\frac{4}{5})^n a_n\}$的最小项为$(-\frac{4}{5})^3 a_3=-\frac{128}{125}$.

（ii）考察偶数项$\{b_{2k}\}$，令$\dfrac{b_{2k}}{b_{2k+2}}=\dfrac{25}{16}\cdot\dfrac{2k+1}{2k+3}>1$，解得$k<\dfrac{8}{3}$，所以有

$$b_2<b_4>b_6>b_8>\cdots,$$

这表明数列$\{(-\frac{4}{5})^n a_n\}$的最大项为$(-\frac{4}{5})^4 a_4=\dfrac{128}{125}$.

综上所述，$\{(-\frac{4}{5})^n a_n\}$存在最大项和最小项，最大项为第四项$\dfrac{128}{125}$，最小项为第三项$-\dfrac{128}{125}$.

19. 解：

解：（1）作$BN\perp PM$交PM于N.

因为平面$PAM\perp$平面PBM，且平面$PAM\cap$平面$PBM=PM$，所以$BN\perp$平面PAM.

又因为$AM\subset$平面PAM，所以$BN\perp AM$.

因为$PB\perp$平面$ABCD$，且$AM\subset$平面$ABCD$，所以$PB\perp AM$.

因为$BN\perp AM$，$PB\perp AM$，PB、$BN\subset$平面PBM，$PB\cap BN=B$，所以$AM\perp$平面PBM.

又因为$BM\subset$平面PBM，所以$AM\perp BM$.

因此，M的轨迹为圆弧，其长度为$\frac{5\pi}{12}$.

（2）$-\dfrac{3}{10}$

20. 解：

（1）要在第一集后的第1-2n天中观看后n集电视剧，考虑第n集在$X=j$时的概率

则在1~(j-1)天要看(n-2)集，在(j+1)~2n天要看1集

$\Rightarrow j-1\ge n-2, 2n\ge j+1$

$\Rightarrow n-1\le j\le 2n-1$，且$P(X=j)=\dfrac{C_{j-1}^{n-2}C_{2n-j}^{1}}{C_{2n}^{n}}$

故X的分布列是

X	n-1	n	n+1	…	j	…	2n-1
P	$\dfrac{C_{n-2}^{n-2}C_{n+1}^{1}}{C_{2n}^{n}}$	$\dfrac{C_{n-1}^{n-2}C_{n}^{1}}{C_{2n}^{n}}$	$\dfrac{C_{n}^{n-2}C_{n-1}^{1}}{C_{2n}^{n}}$	…	$\dfrac{C_{j-1}^{n-2}C_{2n-j}^{1}}{C_{2n}^{n}}$	…	$\dfrac{C_{2n-2}^{n-2}C_{1}^{1}}{C_{2n}^{n}}$

（2）记$a_j=P(X=j), n-1\le j\le 2n-1$，要求$\{a_j\}$中的最大项

考虑$\dfrac{a_{j+1}}{a_j}=\dfrac{C_j^{n-2}(2n-j-1)}{C_{j-1}^{n-2}(2n-j)}=\dfrac{j(j-1)\ldots(j-(n-2)+1)(2n-j-1)}{(j-1)(j-2)\ldots(j-1-(n-2)+1)(2n-j)}$

$=\dfrac{j(2n-j-1)}{(j-(n-2))(2n-j)}=\dfrac{j(2n-j)-j}{j(2n-j)-(n-2)(2n-j)}$

由于 $n-1\le j\le 2n-1\Rightarrow 2n-j-1\ge 0$，$j-(n-2)\ge 1$

$\therefore a_{j+1}<a_j \Leftrightarrow j(2n-j)-j<j(2n-j)-(n-2)(2n-j)$

$\Leftrightarrow 2n(n-2)<(n-1)j$

$\Leftrightarrow j>\dfrac{2(n^2-2n)}{n-1}=2n-2-\dfrac{2}{n-1}$，$n\ge 10$

即 $j\ge 2n-2$ 时，有 $a_{j+1}<a_j$

同理可得 $j\le 2n-3$ 时，有 $a_{j+1}>a_j$

$\therefore a_{n-1}<a_{n-2}<\ldots<a_{2n-3}<a_{2n-2}>a_{2n-1}$

$\therefore \{a_j\}$中的最大项为a_{2n-2}，即最有可能在第 $(2n-2)$ 天观看第 n 集.

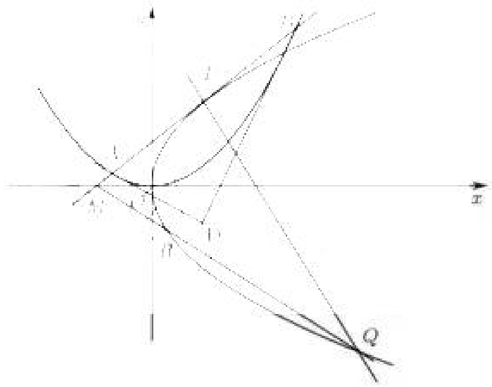
21．**解：**

（1） 将$(4,4)$代入$C_1,C_2\Rightarrow p=2$，$\therefore C_1:y^2=4x$，$C_2:x^2=4y$

设$P(t^2,2t),t>0$，P处切线：$y\cdot 2t=2(x+t^2)\Rightarrow ty=x+t^2$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

$\begin{cases} ty=x+t^2 \\ x^2=4y \end{cases}\Rightarrow x^2-\dfrac{4}{t}x-4t=0$



$x_1+x_2=\dfrac{4}{t},x_1x_2=-4t$

$AD:xx_1=2(y+y_1),BD:xx_2=2(y+y_2)$

$\Rightarrow D(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{4})$,即$D(\dfrac{2}{t},-t)$

$AB:y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1=\dfrac{1}{t}x+t$

$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}|x_1-x_2|$，点$D$到$AB$距离$d=\dfrac{\left|\dfrac{2}{t^2}+2t\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}$

$S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}|x_1-x_2|\cdot\dfrac{\left|\dfrac{2}{t^2}+2t\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}=(\dfrac{1}{t^2}+t)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=(\dfrac{1}{t^2}+t)\sqrt{\dfrac{16}{t^2}+16t}=4(\dfrac{1}{t^2}+t)^{\frac{3}{2}}$

令$f(x)=\dfrac{1}{t^2}+t$，$f'(x)=1-\dfrac{2}{t^3}$，所以$S_{\Delta ABD}$最小时，$t^3=2$

而 P为AB中点 $\Leftrightarrow \dfrac{x_1+x_2}{2}=x_P\Leftrightarrow \dfrac{2}{t}=t^2\Leftrightarrow t^3=2$

$\therefore$当$\triangle ABD$ 面积最小时，P 为 AB 中点.来源：高三答案公众号

（2） $AB:y=\dfrac{1}{t}x+t\Rightarrow PQ:y=-t(x-t^2)+2t$，即$x=-\dfrac{y}{t}+2+t^2$，

$M(-t^2,0)$，PQ与x轴交点$N(2+t^2,0)$

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta MPQ}}=\frac{|QR|}{|QM|}=\frac{y_R-y_Q}{-y_Q}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta PQR}=(1-\frac{y_R}{y_Q})S_{\Delta MPQ}=(1-\frac{y_R}{y_Q})\cdot\frac{1}{2}|MN|(y_P-y_Q)=(1-\frac{y_R}{y_Q})(1+t^2)(2t-y_Q)$$

联立$\begin{cases}x=-\dfrac{y}{t}+2+t^2\\ y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2+\dfrac{4}{t}y-8-4t^2=0$

$y_P-y_Q=-\dfrac{4}{t}\Rightarrow y_Q=-\dfrac{4}{t}-2t$，$Q(\dfrac{4}{t^2}+t^2+4,-\dfrac{4}{t}-2t)$

$$MQ:x+t^2=\frac{\frac{4}{t^2}+t^2+4+t^2}{-\frac{4}{t}-2t}y\Rightarrow x=-\frac{t^2+2+\frac{2}{t^2}}{\frac{2}{t}+t}y-t^2$$

联立$\begin{cases}x=-\dfrac{t^2+2+\frac{2}{t^2}}{\frac{2}{t}+t}y-t^2\\ y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2+4\dfrac{t^2+2+\frac{2}{t^2}}{\frac{2}{t}+t}y+4t^2=0$

$$y_Qy_R=4t^2\Rightarrow y_R=\frac{4t^2}{-\frac{4}{t}-2t}=-\frac{2t^2}{\frac{2}{t}+t}$$

$$\text{则 } S_{\Delta PQR}=(1-\frac{-\frac{2t^2}{\frac{2}{t}+t}}{-\frac{4}{t}-2t})(1+t^2)(2t+\frac{4}{t}+2t)=\frac{16(t^2+1)^3}{t(t^2+2)^2}$$

令$\varphi(t)=\dfrac{(t^2+1)^3}{t(t^2+2)^2}$，$\varphi'(t)=\dfrac{(t^2+1)^2(t^4+5t^2-2)}{t^2(t^2+2)^3}$

所以当$\varphi(t)$最小时，$t^2=\dfrac{\sqrt{33}-5}{2}$，故$M(\dfrac{5-\sqrt{33}}{2},0)$

22．**解：**

(1)

当$a\leqslant 0$时，$x=0$无意义；

当$a>0$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+a}-e^{-x}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{a}-1$.

若$a\neq 1\Rightarrow f'(0)\neq 0\Rightarrow x=0$不是极值点；

若$a=1\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^x-x-1}{(x+1)e^x}\geqslant 0$，故$x=0$不是极值点.

综上所述，$x=0$不是极值点.

(2)

$1<a<2$ 时，$x\in(-a,+\infty)$，$f(x_0)=\ln(x_0+a)+e^{-x_0}-a=0$，

要证：$a\in(-a,0)$ 时，$\ln(x+a)+e^{-x}-a<\dfrac{1}{x_0+a}-e^{-x_0}$.

由于 $f(-a)\to-\infty$，$f(1-a)=e^{a-1}-a>0\Rightarrow x_0\in(-a,1-a)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x+a}-e^{-x}=\dfrac{e^x-x-a}{(x+a)e^x}$.

令 $g(x)=e^x-x-a$，$g(-a)=e^{-a}>0$，$g(0)=1-a<0$，

则存在 $-a<m<0$，使得 $f(x)$ 在 $(-a,m)$ 上单调增，$(m,0)$ 上单调减，且 $e^m=m+a$.

故 $f(x)\leqslant f(m)=\ln(m+a)+e^{-m}-a$，只需证：$\ln(m+a)+e^{-m}-a<\dfrac{1}{x_0+a}-e^{-x_0}$

$\Longleftrightarrow m+e^{-m}-a<\dfrac{1}{x_0+a}-(a-\ln(x_0+a))\Longleftrightarrow m+e^{-m}<\dfrac{1}{x_0+a}+\ln(x_0+a)$.

记 $h(x)=x+e^{-x}$，只需证：$h(m)<h(\ln(x_0+a))$.

由于 $m<0$，$\ln(x_0+a)<0$，当 $x<0$ 时，$h'(x)=1-e^{-x}<0$.

则 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减，于是只需证：$m>\ln(x_0+a)\Longleftrightarrow m>x_0\Longleftrightarrow f(m)>0$.

由 $f(m)\geqslant f(1-a)>0$，得证！