

2022 学年第二学期宁波三锋教研联盟期中联考

高一年级数学学科参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	D	A	B	A	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

题号	9	10	11	12
答案	AD	ABD	BC	AC

三、填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 14. 14π 15. $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 16. $(0, 3)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解析：(1) $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2$ 2 分

$$= 2 \times 2^2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{13}{2} \quad \text{.....4 分}$$

(2) $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{19}$ 6 分

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = 2 \quad \text{.....8 分}$$

令 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角为 θ ，即 $\cos \theta = \frac{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|2\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{\frac{13}{2}}{2\sqrt{19}} = \frac{13\sqrt{19}}{76}$ 10 分

18. 解析：(1) 因为 $\vec{m} \perp \vec{n}$ ，所以 $\vec{m} \cdot \vec{n} = a \sin B + \sqrt{3}b \cos A = 0$ 2 分

即： $\sin A \sin B + \sqrt{3} \sin B \cos A = 0$ 4 分

因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 0$, 即: $\tan A = -\sqrt{3}$ 5 分

又因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{2}{3}\pi$ 6 分

(2) 方法 1: 由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 8 分

代入可得关于 c 的方程: $c^2 + 2c - 3 = 0$, 解得: $c = 1$ 或 $c = -3$ (舍)10 分

由三角形面积公式 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 12 分

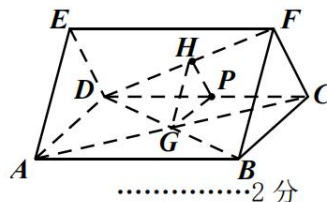
方法 2: 由正弦定理可得: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 8 分

因为 $A = \frac{2}{3}\pi$, 所以 $\cos A = -\frac{1}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{3}$, $\cos B = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 9 分

所以 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 10 分

由三角形面积公式 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times 2 \times \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 12 分

19. 解析: (1) 证明: 连接 BD , 由四边形 $ABCD$ 为平行四边形
可知, 连接 BD 必与 AC 相交于中点 G ,
所以 G 是 DB 中点



又因为 H 是线段 DF 的中点, 故 $GH \parallel BF$4 分

(2) 当 P 为线段 CD 中点时, 有平面 $GHP \parallel$ 平面 BCF ,6 分

证明: $\because GH \not\subset$ 平面 BCF , $BF \subset$ 平面 ABC , $GH \parallel BF \therefore GH \parallel$ 平面 ABC 8 分

又因为点 P, G 分别为 CD, BD 中点可得: $PG \parallel BC$

$\therefore PG \not\subset$ 平面 BCF , $BC \subset$ 平面 BCF , $\therefore PG \parallel$ 平面 BCF ,11 分

且 $GH \cap GP = G$, 故平面 $GHP \parallel$ 平面 BCF12 分

20. 解析: 方法 1: 坐标法

(1) 以 A 为原点, AB 为 x 轴建立直角坐标系

可得: $A(0,0), B(4,0), N(1,0), D(2,2\sqrt{3}),$

$C(4,2\sqrt{3}), M(1,\sqrt{3}), G(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$

所以, $\overrightarrow{AG} = (1, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AC} = (4, 2\sqrt{3})$

因为 $1 \times 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 0$, 所以 $\overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{AC}$

由于 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}$ 有公共点 A , 所以 A, G, C 三点共线.

(2) 设 $P(4, t), 0 \leq t \leq 2\sqrt{3}, \overrightarrow{PB} = (0, -t)$

因为 $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PG} = 2(-3, \frac{\sqrt{3}}{2} - t) = (-6, \sqrt{3} - 2t)$

所以 $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \cdot \overrightarrow{PB} = 2t^2 - \sqrt{3}t = 2(t - \frac{\sqrt{3}}{4})^2 - \frac{3}{8}$

即当 $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 时, $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值是 $-\frac{3}{8}$.

方法 2: 基底化, 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ 为一个基底为例

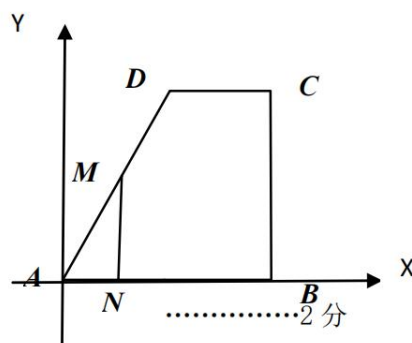
(1) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

因为 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{AC}$

由于 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}$ 有公共点 A , 所以 A, G, C 三点共线.

(2) 令 $\overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{CB}, 0 \leq \lambda \leq 1$



.....4 分

.....6 分

.....7 分

.....9 分

.....11 分

.....12 分

.....2 分

.....4 分

.....6 分

.....7 分

(2) 如图所示, 延长 CQ 和 DA , 使其交于 E 点, 连接 PE , 交 A_1A 于 R .

因为 Q 为 AB 的中点, $AQ \parallel DC$, 所以 A 为 ED 的中点, 又 $AR \parallel PD$,

所以 $\frac{AQ}{DC} = \frac{EA}{ED} = \frac{RA}{PD} = \frac{1}{2}$, 所以 $RA = \frac{1}{2}$ (只要点 R 位置找对都给分)8 分

$V_{\text{下}} = V_{P-EDC} - V_{R-AEQ} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ 10 分

$V_{\text{上}} = V_{\text{正方体}} - V_{\text{下}} = \frac{41}{6}$ 11 分

所以 $\frac{V_{\text{上}}}{V_{\text{下}}} = \frac{41}{7}$ 12 分

22. 解析:

(1) 选① 由题意得: $\sqrt{3} \sin A \cos C + \sin A \sin C - \sqrt{3} \sin B = 0$ 1 分

即 $\sqrt{3} \sin A \cos C + \sin A \sin C - \sqrt{3} \sin(A+B) = 0$ 2 分

所以 $\sin A \sin C = \sqrt{3} \cos A \sin C$, 又因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$,3 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4 分

选② 由题意得: $\sin^2 B - 2 \sin B \sin C + \sin^2 C = \sin^2 A - \sin B \sin C$ 1 分

即 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ 2 分

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$ 3 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4 分

选③ 由题意得: $bc \cos A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} bc \sin A$ 2 分

所以 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A$, 即 $\tan A = \sqrt{3}$,3 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4 分

(2) 如图, 设 $\angle ABC = \theta$, 则 $\angle CBD = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\angle CDB = \theta + \frac{\pi}{4}$,

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle BCD}$,

$$\text{可得 } BC = \frac{BD \sin \angle BDC}{\sin \angle BCD} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin \theta} = \frac{BC}{\sin A}$,

$$\text{可得 } AC = \frac{BC \cdot \sin \theta}{\sin A} = \frac{2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \theta}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \theta \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \right) \sin \theta = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin^2 \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \cos \theta \right)$$

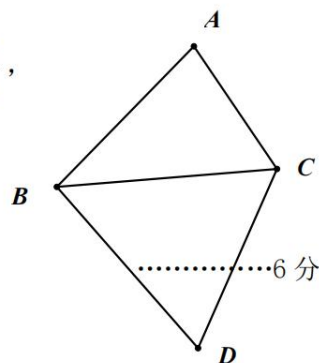
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\theta \right) + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以 $\begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2}{3}\pi - \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 得到 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以可得 $\frac{\pi}{12} < 2\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$,

当 $2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $\theta = \frac{3\pi}{8}$ 时, 可得: AC 的最大值是 $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址: www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**浙江官方微信号: **zjgkjzb**。



微信搜一搜

浙考家长帮

