2024届10月质量监测考试

文科数学参考答案

1. B　解析：$z=3-2a+(a+6)i$，由题意得：$3-2a=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}$.

2. C　解析：$\vec{c}-\vec{b}=(2m-2,\ m-2)$，$\vec{a}//\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\Rightarrow 1\times(m-2)=2(2m-2)\Rightarrow m=\frac{2}{3}$.

3. A　解析：$\complement_I N=\{1,\ 2\}$，故$(\complement_I N)\cap M=\{1,\ 2\}$.

4. C　解析：$a=3^{-\frac{1}{3}}<3^{\frac{1}{5}}=b$，$c=\log_3\frac{1}{5}<\log_3 1=0$，$\therefore\ c<a<b$.

5. D　解析：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot 2\cdot\cos 120^\circ+\frac{2}{3}\cdot 2=-\frac{2}{3}$.

6. D　解析：$\tan\theta=\frac{\cos 2}{\sin 2}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\right)$，故$\theta=\frac{\pi}{2}-2+k\pi$，又$\sin 2>0$，$\cos 2<0$，故$\theta$在第四象限，故$\theta=\frac{5\pi}{2}-2$.

7. C　解析：设切点横坐标为x_0，所做切线斜率为k，则$k=f'(x_0)=1-\frac{a}{x_0}$，当$a\leqslant 0$时，$k=1-\frac{a}{x_0}>0$，故不存在$k_1k_2=-1$；当$a>0$时，满足：$\begin{cases}1-a<0\\ 1-\frac{a}{6}>0\\ (1-a)(1-\frac{a}{6})<-1\end{cases}\Rightarrow 3<a<4$.

8. D　解析：$x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow x+\frac{\pi}{12}\in(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12})$，故$\sin(x+\frac{\pi}{12})=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})=2\sin[(x+\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{4}]=\sqrt{2}[\sin(x+\frac{\pi}{12})+\cos(x+\frac{\pi}{12})]=\sqrt{2}(\frac{7\sqrt{2}}{10}+\frac{\sqrt{2}}{10})=\frac{8}{5}$.

9. C　解析：A：$a+b>a+\frac{1}{a}>2$，故A正确；B：$a>\frac{1}{a}\Rightarrow a^2>1\Rightarrow a>1$，B正确；C：取$a=3$，$b=\frac{1}{2}$显然满足条件，故C错误；D：$(a-b)+\frac{b-a}{ab}=(a-b)(1-\frac{1}{ab})$，$\because\ a>b$，$\therefore\ a-b>0$，$b>\frac{1}{a}\Rightarrow ab>1$，$\frac{1}{ab}<1\Rightarrow 1-\frac{1}{ab}>0$，故D正确.

10. A　解析：条件p等价于$a-1>1\Rightarrow a>2$；条件q等价于$2<a<3$；故：p是q的必要不充分条件；

11. C　解析：(1)$\Delta=(b-2)^2-4b>0$,故（1）正确；

（2）$f(x)-ax=x^2+(b-a-2)x+b\Rightarrow\Delta=(b-a-2)^2-4b>0$，故（2）错误

（3）$f(x)-x=x^2+(b-3)x+b$，$x_1+x_2=3-b>3$，故（3）正确；

（4）$y=f(x)-x$的两个零点是x_1、$x_2\Rightarrow f(x_1)=x_1\Rightarrow f\left(f(x_1)\right)=f(x_1)\Rightarrow x_1\Rightarrow f\left(f(x_1)\right)-x_1=0$，故$x_1$是$f\left(f(x)\right)-x$的零点，同理，$x_2$也是$f\left(f(x)\right)-x$的零点；（4）正确.

故选C.

12. D　解析：可行域如图中阴影部分，$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$ 的几何意义是：可行域中的点与点 $(2,2)$ 的距离，最小值为 $(2,2)$ 到直线 $x+2y-4=0$ 的距离 $\frac{2}{\sqrt{5}}$，故 $(x-2)^2+(y-2)^2$ 最小值为 $\frac{4}{5}$，经检验成立.

13. $0<x<4$　解析：$\log_4 x=\frac{\log_4 x}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 x$，故原不等式化为 $\frac{3}{2}\log_2 x<3 \Rightarrow 0<x<4$.

14. 2　解析：$\log_a b\times\log_b(a^2+12)=\log_a b\times\frac{\log_a(a^2+12)}{\log_a b}$

$=\log_a(a^2+12)=4 \Rightarrow a^4-a^2-12=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=2$.

15. $\frac{1}{4}$　解析：$f(\frac{1}{2}+x)=f(\frac{1}{2}-x)=-f(x-\frac{1}{2})$，令 $x-\frac{1}{2}=t$，则 $x=t+\frac{1}{2} \Rightarrow f(t+1)=-f(t)$，故 $f(\log_2 5)=-f(\log_2 5-1)=f(\log_2 5-2)=f(\log_2\frac{5}{4})$，$\because \frac{5}{4}<2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_2\frac{5}{4}<\frac{1}{2}$，$\therefore f(\log_2\frac{5}{4})=2^{\log_2\frac{5}{4}}-1=\frac{1}{4}$.

16. $\log_{17}626$，$\log_2 5$，$\frac{5}{2}$　解析：由结论得：$\log_{17}626<\log_{16}625=\log_2 5$，又 $2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}>\sqrt{25}=5$，故从小到大的次序是：$\log_{17}626$，$\log_2 5$，$\frac{5}{2}$.

17. 解：（1）$f(x)=2\sin x(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，最大值为 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………… 4分

（2）$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Rightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$，故 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=k\pi$ 或 $\frac{\pi}{6}+k\pi$ 满足条件的解有3个：π、$\frac{\pi}{6}$、$\frac{7\pi}{6}$，和为 $\frac{7\pi}{3}$　…………………………… 10分

18. 解：（1）将 $(2,\frac{5}{2})$ 代入 $f(x)$ 解析式得：$2a+\frac{b}{2}=\frac{5}{2}$，$ax+\frac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}=\sqrt{6} \Rightarrow ab=\frac{3}{2}$，两式联立解得：$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=2\end{cases}$，由 $b<4a$ 得：$a=\frac{3}{4}$，$b=2$. ………………………………………… 4分

（2）平移直线 l 与函数图象相切于 $M_0(x_0,y_0)$，则 $f'(x_0)=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}-\frac{2}{{x_0}^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow x_0=2$，$M_0(2,\frac{5}{2})$.

M_0 到 l 的距离即为动点 M 到 l 距离的最小值：$\frac{\left|2-4x\cdot\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{17}}=\frac{8\sqrt{17}}{17}$. ………………………… 12分

19. 解：（1）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20 \Rightarrow bc\cos A=20$，$S_{\Delta ABC}=10\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A=10\sqrt{3}$，

两式相除得：$\tan A=\sqrt{3} \Rightarrow \angle A=60°$. ……………………………………………………………… 4分

（2）$\because O$ 为外心，故 $\angle BOC=2\angle A=120°$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\times(-\frac{1}{2})=-\frac{49}{6} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OB}\right|=\frac{7}{\sqrt{3}}$.

由正弦定理可知：$\frac{a}{\sin A}=2R=\frac{14}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=7$. ………………………………………… 12分

20. 解:（1）设 $c=\sqrt{3}k$，$AD=2k$，$b=2\sqrt{3}k$，

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，

$\therefore \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}|AD|\cdot c\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}|AD|\cdot b\sin\frac{A}{2}$

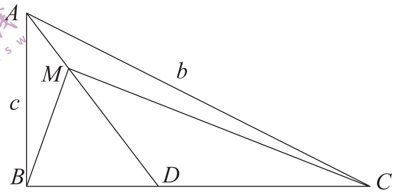
$\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}=\sin A$

$\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$\therefore \cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{A}{2}\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，

$\therefore \frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………… 5分

（2）由（1）知：$\angle BAD=30°$，



ΔBAD中，$BD^2=3k^2+4k^2-2\cdot\sqrt{3}k\cdot 2k\cdot\cos 30°=k^2$

$\Rightarrow BD=k$，$DC=2k$，故得：$\angle ABC=90°$，$\angle C=30°$，

设$\angle ABM=\theta$，ΔABM中，

$\frac{AM}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin(150°-\theta)}=\frac{\sqrt{3}k}{\sin(150°-\theta)}$，

ΔACM中，$\frac{AM}{\sin(30°-\theta)}=\frac{AC}{\sin(120°+\theta)}=\frac{2\sqrt{3}k}{\sin(120°+\theta)}$，

…………………………………………………………………………………………………… 7分

两式相除得：$\frac{\sin(30°-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin(120°+\theta)}{2\sin(150°-\theta)}=\frac{\sin(120°+\theta)}{2\sin(30°+\theta)}$…………………………… 9分

$2(\frac{1}{4}\cos^2\theta-\frac{3}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)\Rightarrow 2\tan^2\theta+\sqrt{3}\tan\theta-1=0\Rightarrow\tan\theta=$
$\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{4}$，

$\because$ θ为锐角，故$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$. ……………………………………………………………… 12分

21. 解：（1）$f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln x$

$f'(x)=\frac{(x+\frac{1}{2})(x-1)}{x}$.

$\because x>0$，$f'(x)=0$时，$x=1$

在区间$(0,\ 1)$上单调递减;

在区间$(1,\ +\infty)$上单调递增，故$f(x)$最小值为$f(1)=0$. …………………………………………… 4分

（2）$f'(x)=\frac{(x-a)(x-1)}{x}$，$a\leqslant 0$时，$(0,\ 1)$上，$f(x)$递减，$(1,\ +\infty)$上，$f(x)$递增.

$0<a<1$时，$(0,\ a)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；$(a,\ 1)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；$(1,\ +\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数.

$a=1$时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，$(0,\ +\infty)$上，$f(x)$为增函数.

$a>1$时，$(0,\ 1)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；$(1,\ a)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；$(a,\ +\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数. …………………………………………………………… 12分

22. 解：（1）$f(x)=e^{x-1}-2e\ln x-2e$，则$f'(x)=e^{x-1}-\frac{2e}{x}$，$f''(x)=e^{x-1}+\frac{2e}{x^2}>0$，故$f'(x)$为增函数.

$(0,\ 2)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

$(2,\ +\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数.

（2）$a<0$时，$x\to 0$时，$f(x)\to -\infty$不合题意；

$a\geqslant 0$时，$f'(x)=e^{x-1}-\frac{a}{x}$，$f''(x)=e^{x-1}+\frac{a}{x^2}>0$，故$f'(x)$为增函数，而$x\to 0$时，$f'(x)\to -\infty$；

$x\to +\infty$时，$f'(x)\to +\infty$故$\exists x_0\in(0,\ +\infty)$，

使$f'(x_0)=e^{x_0-1}-\frac{a}{x_0}=0$，且$(0,\ x_0)$上，$f'(x)<0$；$(x_0,\ +\infty)$上，$f'(\infty)>0$，故$f(x)$最小值为

$f(x_0)=e^{x_0-1}-x_0e^{x_0-1}(\ln x_0+1)\geqslant 0\Rightarrow 1-x_0-x_0\ln x_0\geqslant 0$，即$\frac{1}{x_0}-1-\ln x_0\geqslant 0$，

令$h(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$，则$h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$，故$h(x_0)\geqslant 0=h(1)$的解集为$0<x_0\leqslant 1$.

对$a=P(x_0)=x_0e^{x_0-1}$有$P'(x_0)=(x_0+1)e^{x_0-1}>0$，即$P(x_0)$为增函数，

故$P(0)<a\leqslant P(1)\Rightarrow a\in(0,\ 1]$.