绝密★启用前

# 2020届高三四校第一次联考
# 数 学（文科）参考答案

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | B | D | D | C | D | D | C | A | C | A | B |

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $\frac{1}{2}$　　14. $3\pi+\frac{24}{\pi}$　　15. $\frac{221}{6}$　　16. $\frac{9\sqrt{7}}{14}$

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：（Ⅰ）设 $BC_1$ 与 $B_1C$ 交于点 $E$，连接 $DE$.

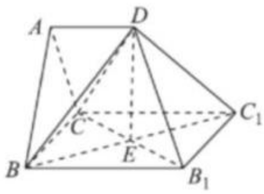
∵多面体 $ABCDB_1C_1$ 是正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 沿平面 $DB_1C_1$ 切除部分所得，

$BC=CC_1$，

∴四边形 $BB_1C_1C$ 是正方形，四边形 $CC_1DA$、$ABB_1D$ 均为直角梯形，

其中 $AB\perp AD$，$AC\perp AD$.

∵点 $D$ 为 $AA_1$ 的中点，$AA_1$ 平行且等于 $BB_1$，




$\therefore BD=\sqrt{BA^2+AD^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

又 $DC_1=\sqrt{(CC_1-AD)^2+AC^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore BD=C_1D$.

∵$E$ 为 $BC_1$ 的中点，∴$BC_1\perp DE$.

又∵$B_1C\perp BC_1$，$B_1C\cap DE=E$，

∴$BC_1\perp$ 平面 $B_1CD$；……………………………………（6分）

（Ⅱ）设点 $B_1$ 到平面 $BCD$ 的距离为 $d$.

∵$V_{B_1-BCD}=V_{D-BCB_1}$，点 $D$ 到平面 $BCC_1B_1$ 的距离即为 $\Delta ABC$ 边 $BC$ 上的高，

即为 $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\Delta B_1BC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又∵$DC=BD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$BC=1$，

$\therefore S_{\Delta B_1BC}=\frac{1}{2}\times BC^2=\frac{1}{2}$，$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\times BC\times\sqrt{BD^2-\frac{1}{4}BC^2}=\frac{1}{2}$.

$$\therefore d=\frac{S_{\Delta B_1BC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即点 $B_1$ 到平面 $BCD$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………（12 分）

18．解：（Ⅰ）由题意知，圆 $O:x^2+y^2-2y=0$ 的圆心为（0，1）.

$\because$ 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过圆 $O:x^2+y^2-2y=0$ 的圆心，

$\therefore b=1$.

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，

$\therefore a^2=2$.

$\therefore$ 所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，可设直线 $l$ 的方程为 $x=my+1$，

联立 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，可得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$. ………………（6 分）

$$\therefore\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}\\ y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}\end{cases}.$$

根据 $A$、$M$、$P$ 三点共线可得 $\frac{y_P}{2+\sqrt{2}}=\frac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}$. $\therefore y_P=\frac{y_1(2+\sqrt{2})}{x_1+\sqrt{2}}$.

同理可得 $y_Q=\frac{y_2(2+\sqrt{2})}{x_2+\sqrt{2}}$.

$\therefore P$、$Q$ 的坐标分别为 $\left(2,\frac{y_1(2+\sqrt{2})}{x_1+\sqrt{2}}\right),\left(2,\frac{y_2(2+\sqrt{2})}{x_2+\sqrt{2}}\right)$. …………（8 分）

设直线 $FP$ 的斜率为 $k_1$，直线 $FQ$ 的斜率为 $k_2$，

数学（文科）答案—2

则 $k_1k_2=\frac{y_P-0}{2-1}\cdot\frac{y_Q-0}{2-1}=y_Py_Q=\frac{y_1\left(2+\sqrt{2}\right)}{x_1+\sqrt{2}}\cdot\frac{y_2\left(2+\sqrt{2}\right)}{x_2+\sqrt{2}}$

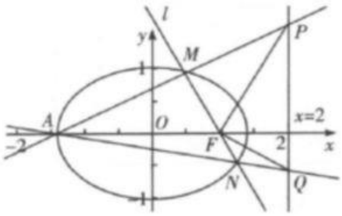
$$=\frac{y_1y_2\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{\left(my_1+1+\sqrt{2}\right)\left(my_2+1+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{y_1y_2\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{m^2y_1y_2+\left(1+\sqrt{2}\right)m\left(y_1+y_2\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=-1$$

$\therefore PF\perp QF$.

$\therefore \Delta PFQ$ 为直角三角形. ……………………………………………………（12 分）




19. 解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，则 $d\geqslant 2$，

由 $a_1=1$，得 $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}d$，………………………………………（1 分）

由题意得，$n+\frac{n(n-1)}{2}d<n^2+2n$ 对 $n\in N^*$ 均成立，

当 $n=1$ 时，上式成立. ………………………………………………………（2 分）

当 $n\geqslant 2$ 时，$d<\frac{2n+2}{n-1}=2+\frac{4}{n-1}$，……………………………………（3 分）

又 $d\in N^*$，

$\therefore d\leqslant 2$，

$\therefore d=2$. ……………………………………………………………………（4 分）

$\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n+1$. ………（6 分）

（Ⅱ）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，则 $a_n=a_1q^{n-1}$，

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的每一项均为正整数，

且 $a_{n+1}-a_n=a_nq-a_n=a_n(q-1)\geq 2>0$，

$\therefore q>1$，且 $q$ 为整数. ……………………………………………………（8 分）

$\because a_{n+1}-a_n=q\left(a_n-a_{n-1}\right)>a_n-a_{n-1}$，

$\therefore$在数列$\left\{a_n-a_{n-1}\right\}$中，$a_2-a_1$为最小项

由数列$\left\{a_n\right\}$为“$D$数列”可知，只需$a_2-a_1\geqslant 2$，即$a_1\left(q-1\right)\geq 2$，

又$a_2-a_1<3$，即$a_1\left(q-1\right)<3$．

由数列$\left\{a_n\right\}$的每一项均为正整数，可得$a_1\left(q-1\right)=2$，

$\therefore a_1=1$，$q=3$或$a_1=2$，$q=2$．……………………………………………（9分）

①当$a_1=1$，$q=3$时，$a_n=3^{n-1}$，

则$b_n=\dfrac{2\times 6^n}{\left(n+1\right)\cdot 3^{n-1}}=\dfrac{3}{n+1}\times 2^{n+1}$．

令$c_n=b_{n+1}-b_n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，

$$
\begin{aligned}
c_n&=\frac{3}{n+2}\times 2^{n+2}-\frac{3}{n+1}\times 2^{n+1}\\
\text{则}\quad &=3\times 2^{n+1}\times\left(\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right),\\
&=3\times 2^{n+1}\times\frac{n}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad c_{n+1}-c_n&=3\times 2^{n+2}\times\frac{n+1}{\left(n+3\right)\left(n+2\right)}-3\times 2^{n+1}\times\frac{n}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}\\
&=3\times 2^{n+1}\times\frac{n^2+n+2}{\left(n+3\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)}>0
\end{aligned},
$$

$\therefore$数列$\left\{c_n\right\}$为递增数列，即$c_n>c_{n-1}>c_{n-2}>\cdots>c_1$．

又$c_1=b_2-b_1=2$，

$\therefore$对任意的$n\in\mathrm{N}^*$都有$b_{n+1}-b_n\geq 2$，

$\therefore$数列$\left\{b_n\right\}$是“$D$数列”．……………………………………………（10分）

②当$a_1=2$，$q=2$时，$a_n=2^n$，

则$b_n=\dfrac{2\times 6^n}{\left(n+1\right)\cdot 2^n}=\dfrac{2}{n+1}\times 3^n$，

令$d_n=b_{n+1}-b_n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，

$$d_n=\frac{2}{n+2}\times 3^{n+1}-\frac{2}{n+1}\times 3^n$$

则 $=2\times 3^n\times\left(\frac{3}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$$=2\times 3^n\times\frac{2n+1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\therefore\ d_{n+1}-d_n=2\times 3^{n+1}\times\frac{2n+3}{(n+3)(n+2)}-2\times 3^n\times\frac{2n+1}{(n+2)(n+1)}$$

$$=2\times 3^n\times\frac{4n^2+8n+6}{(n+3)(n+2)(n+1)}>0$$

$\therefore$数列$\{d_n\}$为递增数列，

即 $d_n>d_{n-1}>d_{n-2}>\cdots>d_1$.

又 $d_1=b_2-b_1=3$,

$\therefore$对任意的 $n\in N^*$都有 $b_{n+1}-b_n\geq 2$,

$\therefore$数列$\{b_n\}$是“$D$ 数列”.

综上，数列$\{b_n\}$是“$D$ 数列”. ……………………………………………（12 分）

20．解：（Ⅰ）记小球落入第 7 层第 6 个空隙处的事件为 $M$，小球落入第 7 层第 6 个空隙处，需要在前 6 次碰撞中有 1 次向左 5 次向右，

则 $P(M)=C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{32}$. ……………………………………………（4 分）

（Ⅱ）（i）记第 7 层从左向右的空隙编号为$\eta+1$，$\eta+1$的取值分别为 1，2，3，4，5，6，7.

则$\eta$的取值分别为 0，1，2，3，4，5，6.

且 $\eta\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，球槽号记为 $X$.

则 $X$ 的取值为 1，2，3，4，5，6.

$$P(X=1)=P(\eta=0)+\frac{1}{2}P(\eta=1)$$

$$=C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{1}{2}C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6;$$

$$=\frac{1}{16}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{2}P(\eta=1)+\frac{1}{2}P(\eta=2)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{2}C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4;$$
$$=\frac{21}{128}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{2}P(\eta=2)+\frac{1}{2}P(\eta=3)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{2}C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3;$$
$$=\frac{35}{128}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{2}P(\eta=3)+\frac{1}{2}P(\eta=4)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2;$$
$$=\frac{35}{128}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{2}P(\eta=4)+\frac{1}{2}P(\eta=5)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1;$$
$$=\frac{21}{128}$$

$$P(X=6)=\frac{1}{2}P(\eta=5)+P(\eta=6)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1+C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0.$$
$$=\frac{1}{16}$$

$\therefore X$ 的分布列为

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{21}{128}$ | $\frac{35}{128}$ | $\frac{35}{128}$ | $\frac{21}{128}$ | $\frac{1}{16}$ |

……………………………………………………（8 分）

（ii）$\xi$ 的可能取值为 0，5，10，15.

$$P(\xi=0)=P(X=4)=\frac{35}{128},$$

数学（文科）答案—6

$P(\xi=5)=P(X=3)+P(X=5)=\frac{7}{16}$，

$P(\xi=10)=P(X=2)+P(X=6)=\frac{29}{128}$，

$P(\xi=15)=P(X=1)=\frac{1}{16}$，

$\therefore E(\xi)=0\times\frac{35}{128}+5\times\frac{7}{16}+10\times\frac{29}{128}+15\times\frac{1}{16}=\frac{345}{64}\approx 5.39<8$.

∴小箐同学能盈利. ……………………………………………………（12 分）

21．解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2+x-\frac{1}{x}$，

$\therefore f'(x)=2x+1+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3+x^2+1}{x^3}$，

①当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；………………………………（2 分）

当 $-1<x<0$ 时，记 $\varphi(x)=2x^3+x^2+1$，

$\therefore \varphi'(x)=6x^3+2x=6x\left(x+\frac{1}{3}\right)$，

∴当 $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，

$\therefore \varphi(x)$ 单调递减，且有 $\varphi(x)>\varphi(0)=1$；

当 $x\in\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 单调递增，且 $\varphi(-1)=0$，

∴当 $x\in(-1,0)$ 时，$\varphi(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

综上，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0),(0,+\infty)$；无单调递减区间.

……………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）$\because g(x)=f(x)-x^2-\ln x=ax-\frac{a}{x}-\ln x(a\in\mathbf{R},x>0)$，

$\therefore g'(x)=a+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{ax^3-x+a}{x^2}$，

$\because x_1$、$x_2$ 是函数 $g'(x)$ 的两个零点，

$\therefore x_1$、$x_2$是方程$ax^2-x+a=0$的两个实数解，

由$\Delta>0$，且$a>\dfrac{e}{e^2+1}$，即$\dfrac{e}{e^2+1}<a<\dfrac{1}{2}$，

则有$x_1x_2=1$，

不妨设$x_1<x_2$，

$\therefore 0<x_1<1<x_2$，

又$\because x_1+x_2=\dfrac{1}{a}$，即得$x_1+\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{a}$，

$\because \dfrac{e}{e^2+1}<a<\dfrac{1}{2}$，

$\therefore 2<\dfrac{1}{a}<\dfrac{e^2+1}{e}=e+\dfrac{1}{e}$，

即得$2<x_1+x_2=x_1+\dfrac{1}{x_1}<e+\dfrac{1}{e}$，从而得到$\dfrac{1}{e}<x_1<1$，……………（8 分）

$\because x_1<x_2$，且$a>\dfrac{e}{e^2+1}>0$，

$\therefore$由二次函数的图象及性质可知，函数$g(x)$在$x_1$处取得极大值，在$x_2$处取得极小值.

$$\therefore \begin{aligned}&|g(x_1)-g(x_2)|=g(x_1)-g(x_2)\\&=\left(ax_1-\frac{a}{x_1}-\ln x_1\right)-\left(ax_2-\frac{a}{x_2}-\ln x_2\right)\\&=\left(ax_1-\frac{a}{x_1}-\ln x_1\right)-\left(\frac{a}{x_1}-ax_1+\ln x_1\right)\\&=2\left(ax_1-\frac{a}{x_1}-\ln x_1\right)\qquad(*)\end{aligned}.$$

又$\because x_1$为方程$ax^2-x+a=0$的根，

$\therefore a=\dfrac{x_1}{x_1^2+1}$，

代入$(*)$式得，

$g(x_1)-g(x_2)=2\left(\dfrac{x_2^2}{x_1^2+1}-\dfrac{1}{x_1^2+1}-\ln x_1\right)=2\left(\dfrac{x_2^2-1}{x_1^2+1}-\dfrac{1}{2}\ln x_1^2\right)$.（10 分）

令 $x_1^2=t$，则 $\frac{1}{e^2}<t<1$，$g(t)=2\left(\frac{t-1}{t+1}-\frac{1}{2}\ln t\right)$，

设 $h(x)=2\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x\right)$，$\frac{1}{e^2}<x<1$，

$\therefore h'(x)=\frac{-(x-1)^2}{x(x+1)^2}<0$，$\therefore h(x)$ 单调递减，

从而有 $0=h(1)<h(x)<h\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2+1}$．

$\therefore 0<g(t)<\frac{4}{e^2+1}$．

$\therefore 0<g(x_1)-g(x_2)<\frac{4}{e^2+1}$，

即 $0<|g(x_1)-g(x_2)|<\frac{4}{e^2+1}$ 得证．……………………………………（12 分）

22．解：（Ⅰ）曲线 $C_1$ 的直角坐标方程为 $x^2+(y-6)^2=2$．

由 $\rho^2=\frac{10}{1+9\sin^2\theta}$，$\rho^2=x^2+y^2$，$y=\rho\sin\theta$，

得 $x^2+y^2+9y^2=10$，

即 $C_2$ 的直角坐标方程为：$\frac{x^2}{10}+y^2=1$．……………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $C_1$ 的圆心为 $A$（0，6），半径 $r=\sqrt{2}$，

设 $N=\left(\sqrt{10}\cos\theta,\sin\theta\right)$，……………………………………………………（6 分）

$|NA|^2=\left(\sqrt{10}\cos\theta-0\right)^2+(\sin\theta-6)^2$

则 $=10\cos^2\theta+\sin^2\theta-12\sin\theta+36$，………………………………（8 分）

$=-9\left(\sin\theta+\frac{2}{3}\right)^2+50$

$\therefore$ 当 $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ 时，$|NA|_{\max}=5\sqrt{2}$，

$\therefore |MN|$ 的最大值为 $5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}$．……………………………………（10 分）

23．解：（Ⅰ）不等式 $f(x)\geq 6$，

即为不等式 $|2x-7|+|2x-5|\geq 6$，……………………………………………（1 分）

当$x<\frac{5}{2}$时，不等式可化为$-(2x-7)-(2x-5)\geq 6$，解得$x\leq\frac{3}{2}$；

当$\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{7}{2}$时，不等式可化为$-(2x-7)+(2x-5)\geq 6$，即 2≥6，无解；

当$x>\frac{7}{2}$时，不等式可化为$(2x-7)+(2x-5)\geq 6$，解得$x\geq\frac{9}{2}$．

综上，不等式$f(x)\geq 6$的解集是$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$． ……………（5 分）

（Ⅱ）$\because f(x)=|2x-7|+|2x-5|\geq|2x-7-(2x-5)|=2$，

当且仅当$(2x-7)(2x-5)\leq 0$时取等号，$\therefore m=2$． ……………………（7 分）

$\because \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\geq\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{1}{a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}$． ………………………………………………………（8 分）

$\because k=\max\left\{\frac{1}{a+b},\frac{a^2+b^2}{a+b}\right\}>0$，

$\therefore k^2\geq\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}$， ……………………………………………（9 分）

$\therefore 2k^2\geq 1$，即$k^2m\geq 1$． ……………………………………………………（10 分）