

因为 $PO \subset$ 平面 APC , $BF \not\subset$ 平面 APC ,4'

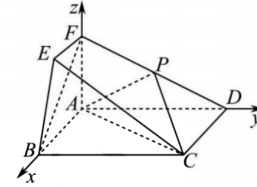
所以 $BF \parallel$ 平面 APC ;5'

(2) 因为直线 $AF \perp$ 平面 $ABCD$, $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AF \perp AB$, $AD \perp AF$, 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $AD \perp AB$,
所以以 A 为原点, AB, AD, AF 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

$$B(1, 0, 0), D(0, 2, 0), E\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), C(1, 2, 0), F(0, 0, 1), P\left(0, 1, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DE} = \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right), \overrightarrow{BC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BF} = (-1, 0, 1), \dots\dots\dots 7'$$



$$\text{设平面 } BCF \text{ 的法向量 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF} = -x + z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (1, 0, 1) \dots\dots\dots 9'$$

设直线 DE 与平面 BCF 所成角的正弦值 θ , 所以

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{DE} \rangle \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} \right|}{\left| \vec{n} \right| \left| \overrightarrow{DE} \right|} = \frac{\left| \frac{1}{2} + 0 + 1 \right|}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{\sqrt{42}}{14}, \dots\dots\dots 12'$$

所以直线 DE 与平面 BCF 所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{42}}{14}$;

19. (1) 证明: 将 $(a+1)x + y - 5 - 2a = 0$ 整理成 $(x-2)a + x + y - 5 = 0$,2'

$$\text{令 } \begin{cases} x-2=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}, \dots\dots\dots 4' \text{ 解得 } x=2, y=3,$$

所以定点 P 为 $(2, 3)$,5'

故不论 a 为何值, 直线 l 必过一定点 $P(2, 3)$;

(2) 解: 由题意知, $a+1 \neq 0$, 由 $(a+1)x + y - 5 - 2a = 0$,

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } x_A = \frac{5+2a}{a+1}, \text{ 当 } x=0 \text{ 时, } y_B = 5+2a, \dots\dots\dots 7'$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{5+2a}{a+1} > 0 \\ 5+2a > 0 \end{cases}, \text{ 得 } a > -1,$$

$$\text{所以 } \triangle AOB \text{ 面积 } S = \frac{1}{2} \cdot x_A \cdot y_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{5+2a}{a+1} \cdot (5+2a) = 12, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 10'$$

$$\text{此时 } A(4, 0), B(0, 6), |AB| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}, \dots\dots\dots 11'$$

$$\text{所以 } \triangle AOB \text{ 的周长为 } 4 + 6 + 2\sqrt{13} = 10 + 2\sqrt{13}, \dots\dots\dots 12'$$

故当 $\triangle AOB$ 面积为 12 时, $\triangle AOB$ 的周长为 $10 + 2\sqrt{13}$.

20. (1) 由 $A(4,0), B(0,4)$, 得直线 AB 的斜率为 $k_{AB} = \frac{0-4}{4-0} = -1$, 线段中点 $D(2,2)$

所以 $k_{CD} = 1$, 直线 CD 的方程为 $y-2 = x-2$, 即 $y = x$,2'

联立 $\begin{cases} x+y-6=0 \\ y=x \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$, 即 $C(3,3)$,3'

所以半径 $r = |AC| = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$,4'

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 10$;5'

(2) 由 l_1 恰好平分圆 C 的圆周, 得 l_1 经过圆心 $C(3,3)$,7'

设点 M 关于直线 $y = x + 1$ 的对称点 $N(x, y)$,

则直线 MN 与直线 $y = x + 1$ 垂直, 且线段 MN 的中点 $\left(\frac{x+4}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$ 在 $y = x + 1$ 上,

则有 $\begin{cases} \frac{y-1}{x-4} = -1 \\ \frac{y+1}{2} = \frac{x+4}{2} + 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$, 所以 $N(0,5)$,10'

所以直线 CN 即为直线 l_1 , 且 $k_{CN} = \frac{5-3}{0-3} = -\frac{2}{3}$,11'

直线 l_1 方程为 $y-3 = -\frac{2}{3}(x-3)$, 即 $2x + 3y - 15 = 0$ 12'

21. (1) 连接 BD ,

$\because E, F$ 分别是线段 PB, PD 的中点, $\therefore EF \parallel BD$,

$\because$ 底面四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore BD \perp AC$,

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp BD$,

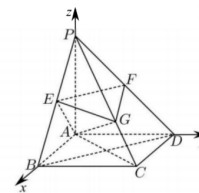
又 $PA \cap AC = A$, $PA, AC \subset$ 平面 PAC , $\therefore BD \perp$ 平面 PAC ,3'

$\because EF \parallel BD$, $\therefore EF \perp$ 平面 PAC ,

又 $EF \subset$ 平面 EFG ,4' $\therefore$ 平面 $EFG \perp$ 平面 PAC5'

(2) 以 A 为坐标原点, 分别以 AB, AD, AP 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0)$, $E(1,0,1)$, $F(0,1,1)$, $P(0,0,2)$, $C(2,2,0)$,



$$\text{设 } \overrightarrow{PG} = \lambda \overrightarrow{PC}, \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PG} = (0, 0, 2) + (2\lambda, 2\lambda, 2-2\lambda) = (2\lambda, 2\lambda, 2-2\lambda), \quad \overrightarrow{AE} = (1, 0, 1), \overrightarrow{AF} = (0, 1, 1),$$

设平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = x + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AF} = y + z = 0 \end{cases}, \quad \text{令 } z = -1, \text{ 解得: } x = 1, \quad y = 1, \quad \therefore \vec{n} = (1, 1, -1); \quad \cdots \cdots 7'$$

设直线 AG 与平面 AEF 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AG} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AG}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AG}|} = \frac{|6\lambda - 2|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda^2 + (2-2\lambda)^2}} = \frac{1}{3}, \quad \cdots \cdots 9'$$

$$\text{解得: } \lambda = \frac{1}{6} \text{ 或 } \lambda = \frac{1}{2} \quad (\text{舍}), \quad \therefore PG = \frac{1}{6} PC, \quad \cdots \cdots 10'$$

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp BC$;

$\because BC \perp AB$, $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp$ 平面 PAB ,

$\therefore G$ 到平面 PAB 的距离为 $\frac{1}{6}BC = \frac{1}{3}$, $\cdots \cdots 11'$

$$\therefore V_{E-ABG} = V_{G-ABE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABE} \cdot \frac{1}{6} BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \cdots \cdots 12'$$

22 (1) 法一: 连结 AC_1 , 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, D 为 AC 中点, $\therefore BD \perp AC$,

又 $C_1D \perp$ 平面 ABC , $BD \subset$ 平面 ABC , $\therefore C_1D \perp BD$

$\because AC \cap C_1D = D, AC, C_1D \subset$ 平面 AA_1C_1C

$\therefore BD \perp$ 平面 AA_1C_1C , 又 $A_1C \subset$ 平面 AA_1C_1C , $\therefore BD \perp A_1C$, $\cdots \cdots 2'$

由题设知四边形 AA_1C_1C 为菱形, $\therefore A_1C \perp AC_1$,

$\because D, E$ 分别为 AC, CC_1 中点, $\therefore DE \parallel AC_1$, $\therefore A_1C \perp DE$, $\cdots \cdots 3'$

又 $BD \cap DE = D$, $BD, DE \subset$ 平面 BDE , $\therefore A_1C \perp$ 平面 BDE . $\cdots \cdots 5'$

法二: 由 $C_1D \perp$ 平面 ABC , $BD, AC \subset$ 平面 ABC , $\therefore C_1D \perp BD$, $C_1D \perp AC$,

又 $\triangle ABC$ 为等边三角形, D 为 AC 中点, $\therefore BD \perp AC$, 则以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC_1}$ 所在直线为 x, y, z

轴, 可建立如图所示空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, -1, 0), C_1(0, 0, \sqrt{3}), E(0, -$

$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), B_1(\sqrt{3}, 1\sqrt{3}), A_1(0, 2, \sqrt{3}),$

$$\therefore \overrightarrow{DB} = (\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{DE} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{A_1C} = (0, -3, -\sqrt{3})$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0, \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \therefore BD \perp A_1C, DE \perp A_1C \cdots \cdots 3'$$

又 $BD \cap DE = D$, $BD \cap DE = D, \cdots \cdots 4'$ $BD, DE \subset$ 平面 BDE , $\therefore A_1C \perp$ 平面 $BDE. \cdots \cdots 5'$

法三：（同法二建系）设平面 BDE 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{DE} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{3}x = 0 \\ -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}$$

不妨取 $z = 1$, 则 $y = \sqrt{3}$, 则 $\vec{m} = (0, \sqrt{3}, 1)$

所以平面 BDE 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, \sqrt{3}, 1) \cdots \cdots 3'$

$$\therefore \overrightarrow{A_1C} = (0, -3, -\sqrt{3}), \therefore \overrightarrow{A_1C} = -\sqrt{3}\vec{m}, \therefore \overrightarrow{A_1C} // \vec{m}, \cdots \cdots 4'$$

$\therefore A_1C \perp$ 平面 $BDE \cdots \cdots 5'$

$$(2) \overrightarrow{C_1B_1} = (\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{CA_1} = (0, 3, \sqrt{3})$$

设 $F(x, y, z)$, $\overrightarrow{C_1F} = \lambda \overrightarrow{C_1B_1} (0 < \lambda < 1)$, 则 $(x, y, z - \sqrt{3}) = (\sqrt{3}\lambda, \lambda, 0)$,

$$\therefore x = \sqrt{3}\lambda, y = \lambda, z = \sqrt{3}, \therefore F(\sqrt{3}\lambda, \lambda, \sqrt{3}), \therefore \overrightarrow{DF} = (\sqrt{3}\lambda, \lambda, \sqrt{3});$$

由 (1) 知: $A_1C \perp$ 平面 BDE , $\therefore$ 平面 BDE 的一个法向量 $\vec{m} = \overrightarrow{CA_1} = (0, 3, \sqrt{3})$

（或者由 (1) 中待定系数法求出法向量）;

设平面 FBD 的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$,

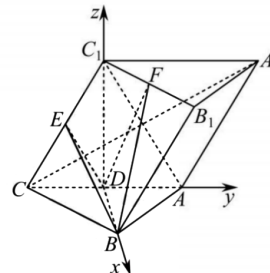
$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \vec{n} = \sqrt{3}a = 0 \\ \overrightarrow{DF} \cdot \vec{n} = \sqrt{3}\lambda a + \lambda b + \sqrt{3}c = 0 \end{cases}, \text{ 令 } b = \sqrt{3}, \text{ 则 } a = 0, c = -\lambda, \therefore \vec{n} = (0, \sqrt{3}, -\lambda); \cdots \cdots 8'$$

$$\therefore |\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|3\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda|}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3 + \lambda^2}} = \frac{|3 - \lambda|}{2\sqrt{3 + \lambda^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(3 - \lambda)^2}{3 + \lambda^2}}, \cdots \cdots 10'$$

$$\text{令 } 3 - \lambda = t \in (2, 3), \text{ 则 } \lambda = 3 - t \therefore |\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t^2}{12 - 6t + t^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\frac{12}{t^2} - \frac{6}{t} + 1}};$$

$$\therefore \frac{1}{t} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \therefore \frac{12}{t^2} - \frac{6}{t} + 1 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right), \therefore |\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \cdots \cdots 12'$$

即锐二面角 $F - BD - E$ 的余弦值的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



注：所有的立体几何大题（18、21、22），如果两问均建系计算，第二问计算错误的，建系思想不重复给分。

高二年级数学学科参考答案

一、单项选择题 1-8: BCAD DBCC

7.C 将直线 1 整理得到 $(2x-y-1)m+(x+y-5)=0$ ，于是 $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ ，所以直

线 1 恒过点 $C(2,3)$ ，

因为点 $A(-4,1)$ 在直线 $l: (2m+1)x-(m-1)y-m-5=0 (m \in \mathbf{R})$ 上的射影为点 B，

所以 $AB \perp BC$ ，则点 B 在以线段 AC 为直径的圆上，该圆的圆心坐标为 $D(-1,2)$ ，半径大小为

$\sqrt{(-1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$ ，又 $|DP|=\sqrt{(-1-3)^2+(2+1)^2}=5$ ，所以点 B 到点 $P(3,-1)$ 距离的最大值为 $5+\sqrt{10}$ ，

8.C 设 $Q(a,0)$ ， $M(x,y)$ ，所以 $|MQ|=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ ，

又 $P\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ，所以 $|MP|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2}$ 。因为 $\frac{|MQ|}{|MP|}=\lambda$ 且 $\lambda=2$ ，所以 $\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2}}=2$ ，

整理可得 $x^2+y^2+\frac{4+2a}{3}x=\frac{a^2-1}{3}$ ，又动点 M 的轨迹是 $x^2+y^2=1$ ，所以 $\begin{cases} \frac{4+2a}{3}=0 \\ \frac{a^2-1}{3}=1 \end{cases}$ ，解得

$a=-2$ ，所以 $Q(-2,0)$ ，又 $|MQ|=2|MP|$ ，所以 $2|MP|+|MB|=|MQ|+|MB|$ ，

因为 $B(2,1)$ ，所以 $2|MP|+|MB|$ 的最小值为 $BQ=\sqrt{(2+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{17}$ 。故选: C。

二、多项选择题: 9.AD 10.ABC 11.ABC 12. BC

11.ABC 曲线 E 上任意点 (x,y) 有: $x^2+y^2=|x|+|y|$ ，该点关于 $y=x$ 的对称点 (y,x) 有

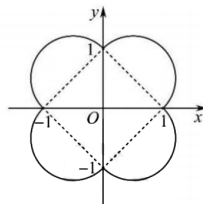
$y^2+x^2=|y|+|x|$ ，即由线 E 上任意点 (x,y) 关于直线 $y=x$ 的对称点仍在曲线 E 上，故选项 A 正

确；

因为点 (x, y) 在曲线 E 上，点 $(-x, y)$ ，点 $(x, -y)$ 也都在曲线 E 上，则曲线 E 关于 x 轴， y 轴对称，

当 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ 时，曲线 E 的方程为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ，表示以点

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为圆心， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆在直线 $x + y = 1$ 上方的半圆（含端点），



因此，曲线 E 是四个顶点为 $(-1, 0)$ ， $(0, -1)$ ， $(1, 0)$ ， $(0, 1)$ 的正方形各

边为直径向正方形外作半圆围成，如图，

所以曲线 E 围成的图形的面积是 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 4 \times \frac{1}{2} \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi + 2$ ，故选项 B 正确；

点 (x_0, y_0) 在曲线 E 上，则 $x_0^2 + y_0^2 = |x_0| + |y_0|$ ， $\therefore \left(|x_0| - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(|y_0| - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \left(|x_0| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$ ， $|x_0| \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ ，解得 $-\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \leq x_0 \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ ，故选项 C 正确；

曲线 E 上的点到原点距离最大值为 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ ，圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$

能覆盖曲线 E ，则 $r_{\min} = \sqrt{2}$ ，故选项 D 不正确。故选：ABC。

12. BC 易知，点 P 在矩形 BCC_1B_1 内部（含边界）。

对于 A，当 $\lambda = 1$ 时，如图 1， $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{CC_1}$ ，即此时 P 在线段 CC_1 ， $\triangle AB_1P$ 周长不是定值，故 A 错误；

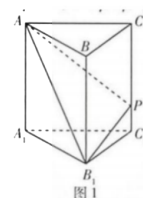


图 1

对于 B，当 $\mu = 1$ 时，如图 2， $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_1} + \lambda \overrightarrow{B_1C_1}$ ，故此时 P 点轨迹为线段 B_1C_1 ，而 $B_1C_1 \parallel BC$ ， $B_1C_1 \parallel$ 平面 A_1BC ，

则有 P 到平面 A_1BC 的距离为定值，所以其体积为定值，故 B 正确。

对于 C，取 BC， B_1C_1 中点分别为 D， D_1 ，连接 DD_1 ， A_1B ，则当 $\lambda = \frac{1}{2}$ ，点 P 在 DD_1 上运动，

假设 $A_1P \perp BP$ ，则 $A_1P^2 + BP^2 = A_1B^2$ ，即 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1 - \mu)^2 + \mu^2 + \frac{1}{4} = 2$ ，解得 $\mu = 0$ 或 $\mu = 1$ 。

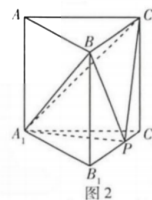
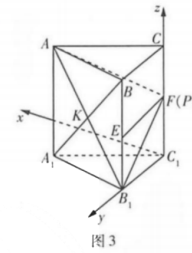


图 2

所以点 P 与 D 或 D_1 重合时, $A_1P \perp BP$, 故 C 正确;

对于 D, 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 如图 3, $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BB_1}$, 取 BB_1, CC_1 中点为 E, F. $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BE} + \lambda \overrightarrow{EF}$, 所以 P 点轨迹为线段 EF. 设 $P(0, y_0, \frac{1}{2})$, 因为 $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AP} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, y_0 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{A_1B} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, 所以 $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y_0 = 0$, 此时 P 与 F 重合, 故 D 错误.



三、填空题:

13. $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{2})$ 14. $4x - 3y - 9 = 0$ 15. $2 + \sqrt{3}$ 16. $[\sqrt{13}, \frac{2\sqrt{109}}{5}]$

15. 【答案】 $2 + \sqrt{3}$ 解: 根据题意, 在平面直角坐标系中, 令点 $A(0, 1)$, $B(0, -1)$, $C(2, 0)$, 则 $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ 表示坐标系中一点 (x, y) 到点 A、B、C 的距离之和,

因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $AC = BC$, 所以 C' 点在 x 轴负半轴上, 所以 CC' 与 x 轴重合,

令 $\triangle ABC$ 的费马点为 $P(a, b)$, 则 P 在 CC' 上, 则 $b = 0$, 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 由性质 (1)

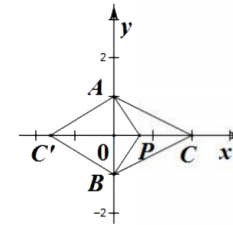
得 $\angle APC = 120^\circ$,

所以 $\angle APO = 60^\circ$, 所以 $\frac{1}{a} = \sqrt{3}$, 所以 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore P(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ 到 A、B、C 的距离分别为 $PA = PB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $PC = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ 的最小值,

即为费马点 P 到点 A、B、C 的距离之和, 则 $PA + PB + PC = 2 + \sqrt{3}$.



16. 答案 $[\sqrt{13}, \frac{2\sqrt{109}}{5}]$ 解: 因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱, 以点 D 为坐标原点, 建立空间直

角坐标系如图, 设 $M(x, 0, z)$, $B(2, 2, 0)$, $D_1(0, 0, 4)$, $E(2, 1, 0)$,

因为 $\overrightarrow{C_1F} = 3\overrightarrow{FC}$, 所以 F 是 CC_1 四等分点(靠近 C), 所以 $F(0, 2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{D_1E} = (2, 1, -4)$, $\overrightarrow{D_1F} = (0, 2, -3)$,

设平面 D_1EF 的一个法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{D_1E} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{D_1F} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2a+b-4c=0 \\ 2b-3c=0 \end{cases}$,

令 $c=2$, 则 $a=\frac{5}{2}$, $b=3$, 故 $\vec{n}=(\frac{5}{2}, 3, 2)$, 又 $\overrightarrow{MB}=(2-x, 2, -z)$, $\overrightarrow{MB} \parallel$ 平面 D_1EF

所以 $\overrightarrow{MB} \perp \vec{n}$, 即 $\overrightarrow{MB} \cdot \vec{n} = 0$, 所以 $\frac{5}{2}(2-x)+6-2z=0$, 所以 $z=\frac{11}{2}-\frac{5}{4}x$,

$$\text{故} |\overrightarrow{MD}| = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{11}{2} - \frac{5}{4}x\right)^2} = \frac{\sqrt{41x^2 - 220x + 484}}{4},$$

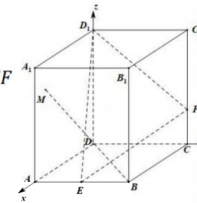
因为 $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 4$, 所以 $\frac{11}{2} - \frac{5}{4}x \in [0, 4]$, 故 $x \in \left[\frac{6}{5}, 2\right]$,

因为 $x = \frac{220}{2 \times 41} = \frac{110}{41} > 2$, 所以 $|\overrightarrow{MD}|$ 在 $x \in \left[\frac{6}{5}, 2\right]$ 上单调递减, 所以当 $x = \frac{6}{5}$ 时, $|\overrightarrow{MD}|$ 取最大值,

$$\text{所以} |\overrightarrow{MD}| \text{的最大值为} \frac{\sqrt{41 \times \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 220 \times \frac{6}{5} + 484}}{4} = \frac{2\sqrt{109}}{5},$$

当 $x=2$ 时, $|\overrightarrow{MD}|$ 取最小值, 所以 $|\overrightarrow{MD}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{41 \times 2^2 - 220 \times 2 + 484}}{4} = \sqrt{13}$,

所以 $|\overrightarrow{MD}|$ 的取值范围是 $\left[\sqrt{13}, \frac{2\sqrt{109}}{5}\right]$.



四、解答题

17. (1) 由斜率公式易知 $k_{AC} = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$2'

$\therefore$ AC 边上的高所在的直线的斜率 $k = 2$3'

又 AC 边上的高所在的直线过点 $B(-2, 0)$, 代入点斜式易得 AC 边上的高所在的直线的方程为: $y =$

$2x + 4$5'

(2) A, B 的中点坐标为 $G(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{0+1}{2})$, 即 $G(-1, \frac{1}{2})$ 6'

又 AB 边上的中线所在的直线过点 $C(2, 0)$. $\therefore k_{CG} = \frac{\frac{1}{2}-0}{-1-2} = -\frac{1}{6}$8'

$\therefore$ AB 边上的中线所在的直线方程为 $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$, 即: $x + 6y - 2 = 0$10'

18. (1) 连接 BD , 交 AC 于点 O , 连接 OP , 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 O 为 BD 的中点,

因为点 P 为棱 DF 的中点, 所以 $BF \parallel PO$,3'

