学校______ 班级______ 姓名______ 准考证号______ 考场号______ 座位号______

密 封 线 内 不 要 答 题

机密★启用前

湖北省 2023 届高三 5 月国都省考模拟测试

数学试题

本试卷共 4 页，22 题. 全卷满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目条件的.

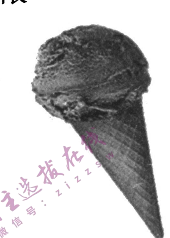
1. 设集合 $A=\{x|3\leqslant x<7\}$，$B=\{x|2\leqslant x<6, x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{3\}$　　B. $\{3,4\}$　　C. $\{4,5\}$　　D. $\{3,4,5\}$

2. 已知 $(1+2i)\bar{z}=4+3i$，其中 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则复数 z 在复平面上对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 美味可口的哈根达斯蛋筒冰激凌可近似看作半径相等的一个半球和一个圆锥组成，如实物图. 已知冰激凌的表面积为 5π，底部圆锥的母线为 3，则冰激凌的体积为



A. $\frac{2\pi}{3}(1+\sqrt{2})$　　B. $\frac{\pi}{3}(1+\sqrt{2})$

C. $\frac{\pi}{3}(1+\sqrt{3})$　　D. $\frac{2\pi}{3}(1+\sqrt{3})$

4. 为平衡城市旅游发展和生态环境保护，某市计划通过五年时间治理城市环境污染，预计第一年投入资金 81 万元，以后每年投入资金是上一年的 $\frac{4}{3}$ 倍；第一年的旅游收入为 20 万元，以后每年旅游收入比上一年增加 10 万元，则这五年的投入资金总额与旅游总收入差额为

A. 325 万元　　B. 581 万元　　C. 721 万元　　D. 980 万元

5. 已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，$\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$，则 $\frac{\sin x}{1-\tan x}=$

A. $\frac{21}{100}$　　B. $-\frac{21}{100}$　　C. $\frac{7\sqrt{2}}{80}$　　D. $-\frac{7\sqrt{2}}{80}$

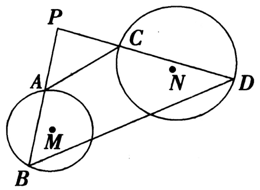
6. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左，右焦点，过点 F_2 的直线与椭圆交于 A, B 两点，设 $\triangle ABF_1$ 的内切圆圆心为 I，则 $\tan\angle IAB$ 的最大值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. 若过第一象限的点 (a,b) 可以作曲线 $y=\ln x$ 的两条切线，则

A. $\ln b<a$　　B. $\ln b>a$　　C. $b<\ln a$　　D. $b>\ln a$

8. 如图，已知圆 $M: x^2+y^2=1$，圆 $N: (x-2)^2+(y-3)^2=1$，已知 P 为两圆外的动点，过点 P 分别作两圆的割线 PAB 和 PCD，总有 $\angle PCA=\angle PBD$，则点 P 的轨迹方程是



A. $4x+6y-13=0$　　B. $x^2+y-2=0$

C. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　D. $x^2-y^2=5$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目条件. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列关于平面向量的说法中正确的是

A. 已知 $A(2,3)$，$B(4,-3)$，点 P 在直线 AB 上，且 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$，则 P 的坐标为 $\left(\frac{16}{5},-1\right)$；

B. 若 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$

C. 若 $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，且 $\boldsymbol{c}\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

D. 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

10. 在一次党建活动中，甲、乙、丙、丁四个兴趣小组举行党史知识竞赛，每个小组各派 10 名同学参赛，记录每名同学失分（均为整数）情况，若该组每名同学失分都不超过 7 分，则该组为“优秀小组”. 已知甲、乙、丙、丁四个小组成员失分数据信息如下，则一定为“优秀小组”的是

A. 甲组中位数为 2，极差为 5　　B. 乙组平均数为 2，众数为 2

C. 丙组平均数为 1，方差大于 0　　D. 丁组平均数为 2，方差为 3

11. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，e 是自然对数的底数，则

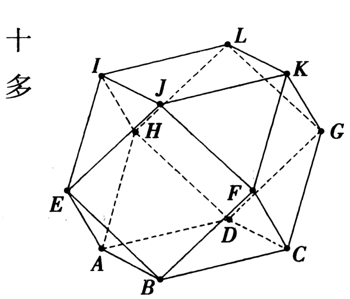
A. $f(2)<f(3)$

B. 若 $x_1\ln x_2=x_2\ln x_1$，则 $x_1+x_2=2e$

C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$

D. “$0<x<2$”是“$x^{\frac{1}{x}}<(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$”的充分不必要条件

12. 如图所示，该多面体是一个由 6 个正方形和 8 个正三角形围成的十四面体，所有棱长均为 1，所有顶点均在球 O 的球面上. 关于这个多面体给出以下结论，其中正确的有



A. FI // 平面 ABE

B. BE 与平面 EIJ 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. 该多面体的体积为 $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

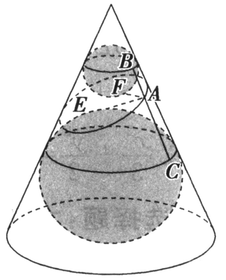
D. 该多面体的外接球的表面积为 8π

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(3-\sqrt{x}\right)^7$ 展开式中含 x^3 项的系数为________.

14. 曲线 $y=x^3$ 在点 $A(2,8)$ 处的切线方程是________.

15. 在圆锥内放入两个大小不等的外离的球 O_1 与球 O_2，半径分别为 R 和 r，且 $R>4r$，使得它们与圆锥侧面和截面相切，两个球分别与截面相切于点 E，F，在截口上任取一点 A，又过点 A 作圆锥的母线，分别与两个球相切于点 B，C，则可知线段 AE，AF 的长度之和为常数. 若圆锥轴截面为等边三角形，则截口曲线的离心率是________.



16. 盒子里装有 5 个小球，其中 2 个红球，3 个黑球，从盒子中随机取出 1 个小球，若取出的是红球，则直接丢弃，若取出的是黑球，则放入盒中，则：(1)取了 3 次后，取出红球的个数的数学期望为________；

(2)取了 $n(n=2,3,4,\cdots)$ 次后，所有红球刚好全部取出的概率为________.

(第一空 2 分，第二空 3 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，A 为锐角，$a\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}b$.

(1)求角 A；

(2)若 D 为 BC 边上一点，且满足 $AD=CD=2BD$，试判断△ABC 的形状.

18. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}(2a_n+n)$.

(1)证明：数列$\left\{\frac{a_n}{n}+1\right\}$是等比数列；

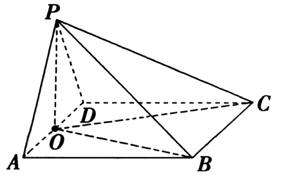
(2)设 $c_n=a_n+n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形，O 是 AD 的中点，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，$PB=\sqrt{6}$.

(1)求证：平面 $PBO\perp$平面 $ABCD$；

(2)求二面角 $O-PC-B$ 的平面角的余弦值.



20. (12 分)

为巩固拓展脱贫攻坚成果，某地区对地方特色手工艺品的质量实行专家鉴定制度：若一件手工艺品被 3 位专家都鉴定通过，则该手工艺品被评为一级品；若一件手工艺品仅有两位专家鉴定通过，则该手工艺品被评为二级品；若一件手工艺品仅有一位专家鉴定通过，则该手工艺品被评为三级品；若一件手工艺品没有得到三位专家的鉴定通过，则相应的被评为四级品. 已知每一件手工艺品被一位专家鉴定通过的概率均为$\frac{2}{3}$，且专家之间鉴定是否通过相互独立.

(1)求一件手工艺品被专家鉴定为二级品的概率；

(2)若一件手工艺品质量分别为一、二、三级均可出厂，且利润分别为 100 元，70 元，20 元，质量为四级品不能出厂，亏损 10 元，记一件手工艺品的利润为 Y 元，求 Y 的分布列及 1000 件产品的平均利润.

21. (12 分)

已知双曲线 Γ 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴和 y 轴，且双曲线 Γ 过点 $A(-2,0)$，$B(-14,24)$.

(1)求双曲线 Γ 的方程；

(2)设过点 $C(-2,3)$的直线分别交 Γ 的左、右支于 D、E 两点，过点 E 作垂直于 x 轴的直线 l，交直线 AB 于点 F，点 G 满足$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FG}$. 证明：直线 DG 过定点.

22. (12 分)

函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax-(ax+1)\ln x$，$g(x)$为 $f(x)$的导函数 $f'(x)$.

(1)讨论 $g(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)$有三个不同的极值点 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$.

(ⅰ)求 a 的取值范围；

(ⅱ)证明：$f(x_3)<f(x_1)$.