2022届四省名校高三第一次大联考

文数参考答案及评分细则

一、选择题

1. B 【解析】∵$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=(0,+\infty)$，∴$A\cap B=\{1,2\}$．故选 B.

2. A 【解析】∵$z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$，∴$\bar{z}=1-i$，则$\bar{z}$的虚部为$-1$．故选 A.

3. D 【解析】∵$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，而$\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，即 D 为假命题．故选 D.

4. C 【解析】∵$\boldsymbol{b}=(-2,6)=-2(1,-3)=-2\boldsymbol{a}$，∴$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向，$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，即 C 正确．故选 C.

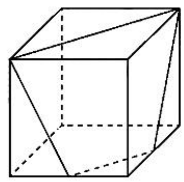
5. C 【解析】该中学高中部数学教师的好评率为$\frac{9\times0.9+10\times0.93+12\times0.95}{9+10+12}=\frac{144}{155}\approx0.93$．故选 C.

6. A 【解析】由题意知，$a_1+a_{11}>0$，$a_2+a_{11}=a_1+a_{12}<0$，得$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}>0$，$S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}<0$．故选 A.

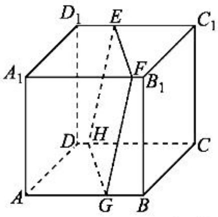
7. B 【解析】由题可知$22=3+19=5+17=11+11$，所以$A=\{3,5,11,17,19\}$，所以从A中任取两个不同的数的基本事件有$\{3,5\}$，$\{3,11\}$，$\{3,17\}$，$\{3,19\}$，$\{5,11\}$，$\{5,17\}$，$\{5,19\}$，$\{11,17\}$，$\{11,19\}$，$\{17,19\}$，共 10 种，满足差大于 8 的基本事件为$\{3,17\}$，$\{3,19\}$，$\{5,17\}$，$\{5,19\}$，共 4 种，所以$P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$．故选 B.

8. B 【解析】由$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha$，得$\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\tan(\pi-2\alpha)=-\tan2\alpha=-\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-2\sqrt{2}$．故选 B.

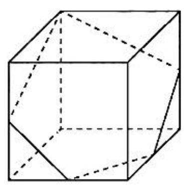
9. C 【解析】画出截面图形如图：



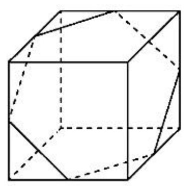
可以画出等腰梯形，故 A 正确；



在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，作截面$EFGH$（如图所示）交C_1D_1，A_1B_1，AB，CD分别于点E，F，G，H，根据平面平行的性质定理可得四边形$EFGH$中，$EF\parallel HG$，且$EH\parallel FG$，故四边形$EFGH$是平行四边形，此四边形不一定是矩形，故 B 正确；



经过正方体的一个顶点去切就可得到五边形．但此时不可能是正五边形，故 C 错误；



正方体有六个面，用平面去截正方体时最多与六个面相交得六边形，且可以画出正六边形，故D正确．故选C．

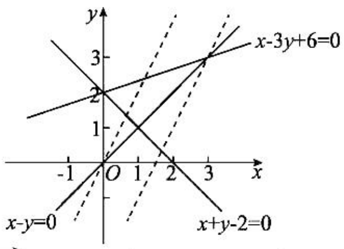
10．C 【解析】令 $f(x)=\lg x+x-10$，显然 $f(x)$ 为增函数，而 $f(1)=-9<0$，$f(10)=1>0$，即方程①有唯一解；令 $g(x)=2^x-\frac{1}{x}(x\neq0)$，当 $x<0$ 时，$g(x)>0$；当 $x>0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，而 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$，$g(1)=1>0$，即方程②有唯一解；方程③中，易得 ±1 是方程③的根；方程④中，当 $x>0$ 时，设 $h(x)=\sin x-x$，所以 $h'(x)=\cos x-1\leqslant0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，所以 $h(x)<h(0)=0$，则 $\sin x<x$，同理 $x<0$ 时，$\sin x< x$，而0显然是方程的根，即方程④有唯一解．故选C．

11．D 【解析】由图象可知，$A=1$，$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，则 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，因为将 $f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，所以 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故A错误；由 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}\neq\pm1$，故B错误；由 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\neq0$，故C错误；由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $g(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$．当 $k=1$ 时，$g(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，此时 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，故D正确．故选D．

12．D 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则直线 AB 的斜率为 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，直线 OM 的斜率为 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，即 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2$．因为点 A,B 在双曲线 C 上，所以有 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，化简可得：$\frac{b^2}{a^2}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，所以有 $\frac{b^2}{a^2}=2$，则双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$．故选D．

二、填空题

13．3 【解析】如图所示，画出可行域，



$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2x-y$，令 $z=2x-y$，则 $y=2x-z$，z 表示直线与 y 轴截距的相反数，根据平移知：当 $x=3$，$y=3$ 时，$z=2x-y$ 有最大值为3．

14．$\frac{1}{2}$ 【解析】抛物线 $y=2ax^2(a>0)$ 即 $x^2=\frac{1}{2a}y(a>0)$，由抛物线定义可知，点 $A\left(m,\frac{3}{4}\right)$ 到其焦点 F 的距离与到准线 $l:y=-\frac{1}{8a}$ 的距离相等，由抛物线 $y=2ax^2(a>0)$ 上的点 $A\left(m,\frac{3}{4}\right)$ 到其准线 l 的距离为1，可得：$\frac{3}{4}+\frac{1}{8a}=1$，解得 $a=\frac{1}{2}$．

15．1 024 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题意

得$\begin{cases}a_1(1+q^3)=18\\a_1q(1+q^3)=9\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=16\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$，$\therefore a_n=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{5-n}$，$\therefore T_n=(a_1)^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}=16^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2-n}{2}}=2^{-\frac{1}{2}n^2+\frac{9}{2}n}$，于是$n=4$或5时，$T_n$取到最大值$2^{10}=1\ 024$.

16. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$ 【解析】由$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$，则$f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-2(-x)+e^{-x}-\frac{1}{e^{-x}}=-\frac{1}{3}x^3+2x+\frac{1}{e^x}-e^x=-f(x)$，即函数为$\mathbf{R}$上的奇函数.又$f'(x)=x^2-2+e^x+\frac{1}{e^x}\geqslant x^2-2+2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{e^x}}=x^2-2+2=x^2\geqslant0$，函数$f(x)$为$\mathbf{R}$上的增函数，又$f(2a-3)+f(a^2)\geqslant0$，所以$f(2a-3)\geqslant-f(a^2)=f(-a^2)$，即$2a-3\geqslant-a^2\Rightarrow a^2+2a-3\geqslant0$，解得$a\geqslant1$或$a\leqslant-3$，即实数$a$的取值范围是$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

三、解答题

17. **解**：(1)$\because\sin A=2\sin B$，

$\therefore$由正弦定理得：$a=2b$.

又$b^2=\frac{1}{3}ac$，

$\therefore a=\frac{4}{3}c,b=\frac{2}{3}c$. (3分)

由余弦定理得：$\cos A=\dfrac{\frac{4}{9}c^2+c^2-\frac{16}{9}c^2}{2\times\frac{2}{3}c\times c}=-\frac{1}{4}$. (6分)

(2)由(1)知，$\cos A=-\frac{1}{4}$，

则$\sin A=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. (8分)

而$c=3$，得$a=4,b=2$. (10分)

$\therefore S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. (12分)

18. **解**：(1)$\because$点D在以BC为直径的圆上，

$\therefore BD\perp CD$. (1分)

$\because AB\perp$平面BCD，$CD\subset$平面BCD，

$\therefore AB\perp CD$. (4分)

$\because AB\cap BD=B$，

$\therefore CD\perp$平面ABD. (5分)

又$\because CD\subset$平面ACD，

$\therefore$平面$ABD\perp$平面ACD. (6分)

(2)由题意可知，所求几何体的体积为两个圆锥体的体积之差. (8分)

在Rt$\triangle BDC$中，$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=8$. (9分)

即$V=\frac{1}{3}\pi\times10^2\times10-\frac{1}{3}\pi\times8^2\times10=\frac{1\ 000\pi}{3}-\frac{640\pi}{3}=120\pi$.

故所求几何体的体积为120π. (12分)

19. **解**：(1)$\because\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，

$\bar{y}=\frac{18+20+23+25+29}{5}=23$. (1分)

$\therefore\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{1\times18+2\times20+3\times23+4\times25+5\times29-5\times3\times23}{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2-5\times3^2}=2.7$.

$\hat{a}=23-2.7\times3=14.9$. (4分)

则y关于x的回归直线方程为$\hat{y}=2.7x+14.9$. (5分)

当$x=6$时，$\hat{y}=2.7\times6+14.9=31.1$.

即估计2022年经济作物A的单价为31.1元/公斤. (6分)

(2)利用频率和为1得 $2m=\frac{1-(0.010+0.0175+0.0125)\times 20}{20}=0.01$,

$\therefore m=0.005$. (8分)

经济作物B的亩产量的平均值为 $360\times 0.005\times 20+380\times 0.010\times 20+400\times 0.0175\times 20+420\times 0.0125\times 20+440\times 0.005\times 20=401$,

故经济作物A亩产值为 $300\times 31.1=9\ 330$ 元,经济作物B亩产值为 $25\times 401=10\ 025$ 元. (10分)

$\because 9\ 330<10\ 025$,

∴应该种植经济作物B. (12分)

20. **解**:(1)由题意知 $\begin{cases}\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$,

所以椭圆 E 的标准方程为: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (4分)

(2)设过点 $N(-1,0)$ 的直线方程为 $x=my-1$, (5分)

代入椭圆 E 的方程,整理得 $(m^2+4)y^2-2my-3=0$.

因为 $\Delta=4m^2+12(m^2+4)=16(m^2+3)>0$,

所以设 $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$, $(x_1,x_2\neq\pm 2)$,

则 $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+4}$, $y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$①. (7分)

由(1)得 $A(-2,0)$, $B(2,0)$.

则直线 AC 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,直线 BD 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$.

联立两直线方程,消去 y,

整理得 $x=2\cdot\frac{(x_2-2)y_1+(x_1+2)y_2}{(x_1+2)y_2-(x_2-2)y_1}$②,

将 $x_1=my_1-1$, $x_2=my_2-1$ 代入②,

整理得 $x=2\cdot\frac{2my_1y_2+(y_1+y_2)-4y_1}{(y_1+y_2)+2y_1}$③. (10分)

把①式代入③,整理得 $x=2\cdot\frac{-4y_1-\frac{4m}{m^2+4}}{2y_1+\frac{2m}{m^2+4}}=-4$.

所以直线 AC、BD 的交点的横坐标为定值 -4. (12分)

21. **解**:(1)当 $a=0$ 时, $f(x)=\ln x+x-1$,

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+1$. (1分)

则 $f'(1)=2$,而 $f(1)=0$, (2分)

∴曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=2(x-1)$,即 $2x-y-2=0$. (4分)

(2) $\because f'(x)=\frac{1}{x}-ax+1=\frac{-ax^2+x+1}{x}$,

令 $g(x)=-ax^2+x+1$.

$\because f(x)$ 在区间 $(0,3)$ 上有唯一的极值点 x_0,

又 $g(0)=1>0$,

只需 $g(3)=-9a+4<0$,解得 $a>\frac{4}{9}$,

$\therefore a\in\left(\frac{4}{9},+\infty\right)$. (7分)

由 $f'(x_0)=0$,得 $g(x_0)=0\Rightarrow -ax_0^2+x_0+1=0$,

$\therefore ax_0^2=x_0+1$.

$\therefore f(x_0)=\ln x_0-\frac{1}{2}ax_0^2+x_0-1=\ln x_0-\frac{1}{2}(x_0+1)+x_0-1=\ln x_0+\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{2}$, $x_0\in(0,3)$. (9分)

令 $h(x)=\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $x\in(0,3)$,

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}>0$,即 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增,

且 $h(3)=\ln 3$.

$\therefore h(x)<\ln 3$. （11分）

$\therefore f(x_0)<\ln 3<\ln 4=2\ln 2$. （12分）

22. **解**：(1)将 $x=2\cos\alpha$，$y=2\sin\alpha$ 两式平方相加，消去参数得，$x^2+y^2=4$，

所以圆 C 的普通方程为 $x^2+y^2=4$. （2分）

由 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$ 得 $\rho\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\rho\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=1$，即 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\sqrt{2}$.

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入得，$x+y=\sqrt{2}$.

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-\sqrt{2}=0$.（5分）

(2)因为直线 l 的方程为 $x+y-\sqrt{2}=0$，倾斜角为 135°，点 $P(\sqrt{2},0)$，

所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）， （6分）

将其代入圆 C 的方程，化简得 $t^2-2t-2=0$，（7分）

则 $\Delta=4-4\times(-2)=12>0$，

设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=2$，$t_1t_2=-2$，t_1，t_2 异号，

故 $\left|\frac{1}{|PA|}-\frac{1}{|PB|}\right|=\left|\frac{1}{|t_1|}-\frac{1}{|t_2|}\right|=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{2}{|-2|}=1$，

所以 $\left|\frac{1}{|PA|}-\frac{1}{|PB|}\right|$ 的值为1. （10分）

23. **解**：(1)当 $a=0$ 时，由题意可得

$$f(x)=\begin{cases}-x+2,x<-1\\ -3x,-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ x-2,x>\frac{1}{2}\end{cases}$$ （2分）

当 $x<-1$ 时，$-x+2>2$，得 $x<0$，此时 $x<-1$；

当 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$-3x>2$，得 $x<-\frac{2}{3}$，此时 $-1\leqslant x<-\frac{2}{3}$；

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$x-2>2$，得 $x>4$，此时 $x>4$.

综上得 $x<-\frac{2}{3}$ 或 $x>4$，

所以不等式 $f(x)>2$ 的解集为 $\left\{x\middle|x<-\frac{2}{3}\text{或}x>4\right\}$. （5分）

(2) $f(x)+3|x+1|=|2x-1|-|x+1|+3|x+1|+2a=|2x-1|+|2x+2|+2a$，

则不等式 $f(x)+3|x+1|\leqslant a^2$ 可化得 $a^2-2a\geqslant|2x-1|+|2x+2|$，

记 $g(x)=|2x-1|+|2x+2|$，

则要使关于 x 的不等式 $f(x)+3|x+1|\leqslant a^2$ 有实数解，

只需 $a^2-2a\geqslant g(x)_{\min}$， （7分）

而 $g(x)=|2x-1|+|2x+2|\geqslant|(2x-1)-(2x+2)|=3$，

当且仅当 $(2x-1)(2x+2)\leqslant 0$ 时取等号. （8分）

即 $g(x)_{\min}=3$，得 $a^2-2a\geqslant 3$，

解不等式 $a^2-2a-3\geqslant 0$ 得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 3$，

所以 a 的取值范围是 $\{a|a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 3\}$. （10分）