

株洲市 2023 届高三年级教学质量统一检测(一)

数学试题答案及评分标准

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题) 两部分,
满分 150 分, 考试时间 120 分钟

第 I 卷

一、选择题(本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	D	C	B	C	C

二、选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求.全部选

对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.)

题号	9	10	11	12
答案	AC	AD	ACD	ABC

第 II 卷

三、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13、2 14、5 (大于等于 5 的正整数均可) 15、1 16、 $\frac{5}{7}$

四、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17、(本小题满分 10 分)

【解】 (I) 在 $\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{7}$,1 分

$$\sin \angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = 1, \cos \angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle DBC &= \cos(60^\circ - \angle ABD) = \cos 60^\circ \cos \angle ABD + \sin 60^\circ \sin \angle ABD \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21} + 3}{4} \end{aligned} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) (法一) 因为 $\angle DCB = 90^\circ$, 所以 $BC = BD \cdot \cos \angle DBC = 3\sqrt{3}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC} = \sqrt{21}$10 分

(法二) 依题意 $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$ 知, A, B, C, D 四点共圆, 且直径 $2R = BD = 2\sqrt{7}$,

在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = 2R = 2\sqrt{7}$, 所以 $AC = 2\sqrt{7} \sin 120^\circ = \sqrt{21}$10 分

18. (本小题满分 12 分)

【解】设“甲没有获得门票”为事件 M_0 ，“甲获得开幕式门票”为事件 M_1 ，“甲获得赛事门票”为事件 M_2 ，

“乙获得 i 张赛事门票”为事件 $N_i (i=0,1,2)$

$$(I) P(M_0) = (1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{10} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$P(N_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

“甲乙都没有获得门票”为事件 $M_0 N_0$ ，则 $P(M_0 N_0) = P(M_0)P(N_0) = \frac{3}{40} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(II) \text{ 依题意 } P(M_1) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}, \quad P(M_2) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(N_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad P(N_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

“乙获得门票数比甲多”为事件 $M_0 N_1 + M_0 N_2 + M_1 N_2 + M_2 N_2$ ，所以

$$\begin{aligned} P(M_0 N_1 + M_0 N_2 + M_1 N_2 + M_2 N_2) &= P(M_0 N_1) + P(M_0 N_2) + P(M_1 N_2) + P(M_2 N_2) \\ &= \frac{3}{40} + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \end{aligned} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

【解】(I) 连接 DO ，因为 $DA = DC$ ， O 为 AC 的中点，所以 $DO \perp AC$ ； $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

设菱形 $ABCD$ 的边长为 2，又因为 $\angle ABC = 90^\circ$ ，所以 $AC = 2\sqrt{2}$ ，连接 BO ，则 $BO = \sqrt{2}$ ，

又因为 $AD = DC = 2$ ， $AC = 2\sqrt{2}$ ，所以 $AD^2 + DC^2 = AC^2$ ，所以 $AD \perp DC$ ，所以 $DO = \sqrt{2}$ ，

又因为 $BD = 2$ ，所以 $DO^2 + BO^2 = DB^2$ ，所以 $DO \perp BO$ ； $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $AC \cap BO = O$ ，所以 $DO \perp$ 平面 ABC ，所以点 O 是点 D 在平面 ABC 上的射影； $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II) 方法一(等体积法)设点 A 到平面 BCD 的距离为 h ，设菱形 $ABCD$ 的边长为 2，

$$\text{则 } \triangle BCD \text{ 的面积为 } \sqrt{3}，\text{ 所以 } V_{A-BCD} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times h = \frac{\sqrt{3}}{3} h； \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\triangle ABC$ 的面积为 2，由(I)知 $DO \perp$ 平面 ABC ， $DO = \sqrt{2}$

$$\text{所以 } V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}，\text{ 所以 } h = \frac{2\sqrt{2}}{3}， \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设直线 AD 与平面 BCD 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin\theta = \frac{h}{AD} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \dots\dots\dots 12$$

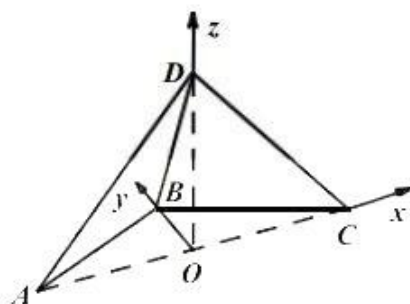
方法二(向量法)由(I)知 $DO \perp$ 平面 ABC , 以 O 为原点, OC, OB, OD 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系(如图),

设菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $A(-\sqrt{2}, 0, 0), B(\sqrt{2}, 0, 0), C(2, 0, 0), D(\sqrt{2}, 2)$;

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = (\sqrt{2}, 0, 2), \quad \sqrt{2}(\sqrt{2} - \overrightarrow{BD}, \sqrt{2}), \sqrt{2} = (2, -2, 0) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{设平面 } BCD \text{ 的法向量为 } \vec{m} = (x, y, z), \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z = 0 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$$



$$\text{令 } x = y = z = 1, \text{ 则 } \vec{m} = (1, 1, 1), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设直线 AD 与平面 BCD 所成角为 θ ,

$$\text{所以 } \sin\theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AD}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{AD}| |\vec{m}|} = \frac{2 + 2 + 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \dots\dots\dots 12$$

(说明: 学生在其它位置建系的酌情给分)

20. (本小题满分 12 分)

$$\text{【解】 (I) } 2^{b_n} = a_n + 1, \therefore b_n = \log_2(a_n + 1), b_1 = \log_2(3 + 1) = 2; \dots\dots\dots 1$$

$$\text{由已知可得 } a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n, \therefore a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \log_2(a_{n+1} + 1) = 2 \log_2(a_n + 1), \therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\log_2(a_{n+1} + 1)}{\log_2(a_n + 1)} = 2, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 由 (I) 得 $b_n = 2^n$, 所以 $c_n = \frac{n}{b_n} + 1 = \frac{n}{2^n} + 1$, 设 $d_n = \frac{n}{2^n}$, 数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$\text{则 } S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \text{ ①}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\frac{n+2}{2^{n+1}}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \text{ 所以 } T_n = S_n + n = n + 2 - \frac{n+2}{2^n} < 100 (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } 2^n < n+2,$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } 2^n = n+2,$$

$$\text{当 } n>3 \text{ 时, } 2^n = (1+1)^n > C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = n+2, \text{ 即 } 0 < \frac{n+2}{2^n} < 1,$$

$$\text{所以 } n+1 < n+2 - \frac{n+2}{2^n} < n+2, \text{ 所以 } n+2 \equiv 100, n \equiv$$

$$\text{所以满足 } T_n < 100 \text{ 的最大整数 } n \text{ 为 } 98. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (本小题满分 12 分)

【解】由已知得曲线 N 的方程为 $y^2 = 4x$ 2 分

(I) 不妨设 A_1 为原点, 则 A_1A_2 的方程为 $x = \sqrt{3}y$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 解得 } A_2(12, 4\sqrt{3}), \text{ 于是 } A_3(12, -4\sqrt{3}).$$

$$\text{所以 } \triangle A_1A_2A_3 \text{ 的面积为 } S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8\sqrt{3} = 48\sqrt{3}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设 $A_i(x_i, y_i) (i=1, 2, 3)$, 则有 $x_i = \frac{y_i^2}{4}$, 不妨设直线 A_1A_2, A_1A_3 与曲线 M 相

切, 直线 A_1A_2 的方程为 $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$, 化简为 $4x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 = 4y \\ 4x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0 \end{cases} \text{ 得 } \frac{y_1 + y_2}{4} x^2 - 4x - y_1y_2 = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\triangle = 16 + (y_1 + y_2)y_1y_2 = 0 \text{ ①} \quad \text{同理 } 16 + (y_1 + y_3)y_1y_3 = 0 \text{ ②}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由①②得: } (y_1 + y_2 + y_3)(y_2 - y_3) = 0, \text{ 因为 } y_2 \neq y_3, \text{ 所以 } y_1 + y_2 + y_3 = 0, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

直线 A_2A_3 的方程为 $4x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 = 4y \\ 4x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0 \end{cases} \text{ 得 } \frac{y_2 + y_3}{4} x^2 - 4x - y_2y_3 = 0, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

依题意 $f(x_1) = ae^{x_1} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2} = 0$ ，又因为 $ae^{x_1} - x_1 = 0$ ，所以 $-\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + \frac{3}{2} = 0$ ，

$$\frac{2}{2} \qquad \qquad \qquad 8$$

解得 $x_1 = \frac{1}{2}$ 或 $x_1 = \frac{3}{2}$ (舍去)，所以 $a = \frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$

.....6 分

(II) 由 (I) 可知： $ae^{x_1} = x_1$ ， $ae^{x_2} = x_2$ ，所以 $e^{x_2-x_1} = \frac{x_2}{x_1}$

.....7 分

令 $t = \frac{x_2}{x_1} (t > 2)$ ，则 $x_2 = tx_1$ ， $e^{x_2-x_1} = e^{t-x_1} = t$ ，则 $x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$

.....8 分

令 $h(t) = \frac{\ln t}{t-1} (t > 2)$ ，则 $h'(t) = \frac{1-t-\ln t}{(t-1)^2}$ ，

令 $\Theta(t) = 1 - \frac{1}{t} - \ln t (t > 2)$ ，则 $\Theta'(t) = \frac{1-t}{t^2} \leq 0$

所以 $\Theta(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减，所以 $\Theta(t) \leq \Theta(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$ ，10 分

所以 $h(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减，所以 $h(t) \leq h(2) = \ln 2$ ，故 $0 \leq x_1 \leq \ln 2$

$a = \frac{x_1}{e^{x_1}}$ ， $g(x) = \frac{x}{e^x}$ 在 $(0, \ln 2]$ 上单调递增，所以 $0 < a \leq$

$\frac{\ln 2}{2}$ 12 分





$$\text{编} = 16 + (v_2 + v_3)v_2v_3 = 16 - v_1v_2v_3 = 16 + (v_1 + v_2)v_1v_2 = 0$$

所以直线 A_2A_3 也与曲线 M 相切.
.....12 分

22. (本小题满分 12 分)

【解】(1) $f'(x) = ae^x - x$,1 分

$$\text{由 } f'(x) = 0 \text{ 得 } a = \frac{x}{e^x},$$

令 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则直线 $y = a$ 与曲线 $y = g(x)$ 有两个不同交点,2 分

$g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减;

且当 $x > 1$ 时, $0 < g(x) < \frac{1}{e}$, 所以 $0 < a < \frac{1}{e}$, 同时 $0 < x_1 < 1 < x_2$,4 分

$$\text{依题意 } f(x_1) = ae^{x_1} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2} = 0, \text{ 又因为 } ae^{x_1} - x_1 = 0, \text{ 所以 } -\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + \frac{3}{2} = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{2} \text{ 或 } x_1 = \frac{3}{2} \text{ (舍去)}, \text{ 所以 } a = \frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

.....6 分

(II) 由 (I) 可知: $ae^{x_1} = x_1$, $ae^{x_2} = x_2$, 所以 $e^{x_2-x_1} = \frac{x_2}{x_1}$
.....7 分

令 $t = \frac{x_2}{x_1} (t > 2)$, 则 $x_2 = tx_1$, $e^{x_2-x_1} = e^{t-1} = t$, 则 $x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$
.....8 分

$$\text{令 } h(t) = \frac{\ln t}{t-1} (t > 2), \text{ 则 } h'(t) = \frac{1 - \frac{1}{t} - \ln t}{(t-1)^2},$$

$$\text{令 } \Theta(t) = 1 - \frac{1}{t} - \ln t (t > 2), \text{ 则 } \Theta'(t) = \frac{1-t}{t^2} < 0$$

所以 $\Theta(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\Theta(t) \leq \Theta(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$,10 分

所以 $h(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(t) \leq h(2) = \ln 2$, 故 $0 \leq x_1 \leq \ln 2$

$a = \frac{x_1}{e^{x_1}}$, $g(x) = \frac{x}{e^x}$ 在 $(0, \ln 2]$ 上单调递增, 所以 $0 < a \leq \frac{\ln 2}{2}$.
.....12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线