天一大联考

2022—2023 学年(上)高二年级期中考试

数学(专版)答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查双曲线的基本性质.

解析　双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$的离心率为$\frac{\sqrt{4+9}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

2. 答案　D

命题意图　本题考查抛物线的准线.

解析　抛物线 $y^2=-4x$ 的准线方程为 $x=1$,与直线 $x+y-3=0$ 的交点为$(1,2)$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查直线的方程与性质.

解析　$kx-2y-4k+1=0$ 可化为 $k(x-4)-2\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$,$\therefore$ 直线过定点$\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

4. 答案　D

命题意图　本题考查椭圆的标准方程.

解析　方程$\frac{x^2}{5+2m}-\frac{y^2}{2m-1}=1$ 即$\frac{y^2}{1-2m}+\frac{x^2}{5+2m}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,则 $1-2m>5+2m>0$,解得 $-\frac{5}{2}<m<-1$.

5. 答案　B

命题意图　本题考查直线与直线的位置关系.

解析　由条件知,l 为线段 OP 的中垂线,因为 OP 的斜率为$\frac{4}{-2}=-2$,线段 OP 的中点坐标为$(-1,2)$,所以 l 的方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$,整理得 $y=\frac{1}{2}(x+5)$,所以 l 在 x 轴上的截距为 -5.

6. 答案　C

命题意图　本题考查直线的性质.

解析　由两直线垂直得 $m\cdot 1+5\times(-3)=0$,解得 $m=15$,所以直线 $mx+5y-3=0$ 即 $15x+5y-3=0$. 又因为垂足$(p,1)$同时满足两直线方程,代入得$\begin{cases}15\times p+5-3=0,\\ p-3+n=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}p=-\frac{2}{15},\\ n=\frac{47}{15},\end{cases}$所以 $m+n+p=15+\frac{47}{15}+\left(-\frac{2}{15}\right)=18$.

7. 答案　B

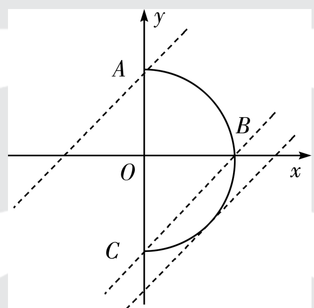
命题意图　本题考查直线与圆的位置关系.

解析　当 OC 与直线 l 垂直时,圆 C 的半径最小. 过原点与 l 垂直的直线方程为 $y=-x$,与 l 的方程联立解得交点为$(2,-2)$,所以当圆心 C 为$(2,-2)$时,圆 C 的半径最小,为 $2\sqrt{2}$,其方程为$(x-2)^2+(y+2)^2=8$.

8. **答案**　A

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系.

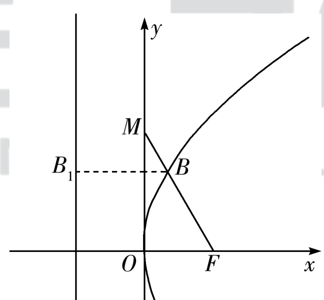
解析　曲线 $C:x=\sqrt{2-y^2}$,即 $x^2+y^2=2(x\geqslant 0)$,表示半个圆. 如图,设 $A(0,\sqrt{2})$,$B(\sqrt{2},0)$,$C(0,-\sqrt{2})$,当 l 经过点 A 时,$\sqrt{2}=0+b$,求得 $b=\sqrt{2}$,当 l 经过点 C 时,$-\sqrt{2}=0+b$,求得 $b=-\sqrt{2}$. 当 l 与 y 轴的交点在 A,C 之间(包含 A 点,不包含 C 点),即 $-\sqrt{2}<b\leqslant\sqrt{2}$时,$l$ 与 C 仅有一个交点. 当 l 和 C 相切时,由圆心到直线 l 的距离等于半径,可得$\sqrt{2}=\frac{|b|}{\sqrt{2}}$,求得 $b=-2$ 或 $b=2$(舍去),即 $b=-2$ 时,只有一个公共点,符合题意. 综上得,实数 b 的取值范围是$(-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cup\{-2\}$.



9. **答案**　D

命题意图　本题考查抛物线的性质及直线与抛物线的位置关系.

解析　如图所示,作 BB_1 垂直于准线于 B_1,由已知得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,由$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{BM}$,得 B 的横坐标为$\frac{p}{6}$,则$|BB_1|=\frac{p}{6}+\frac{p}{2}=\frac{4}{3}$,解得 $p=2$,所以抛物线方程为 $y^2=4x$,所以 $B\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,再根据$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{BM}$得 M 的纵坐标为$\sqrt{3}$.



10. **答案**　C

命题意图　本题考查圆与圆的位置关系.

解析　圆 C 的方程化为$(x+4)^2+(y+3)^2=9$,圆心为 $C(-4,-3)$,半径为 3. 由已知得$|OA|=r$,$|CA|=3$,$|OC|=5$,因为 $S_{四边形OACB}=2S_{\triangle OAC}$,所以 $S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot r\sin\angle OAC=\frac{3r}{2}$,所以 $\sin\angle OAC=1$,即 $OA\perp CA$,所以 $r^2+3^2=5^2$,所以 $r=4$,圆 O 的方程为 $x^2+y^2=16$. 两个圆的方程作差,得 $4x+3y+16=0$,此方程即直线 AB 的

方程. 原点 O 到直线 $4x+3y+16=0$ 的距离为$\frac{16}{5}$,所以$|AB|=2\sqrt{16-\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$.

11. **答案** A

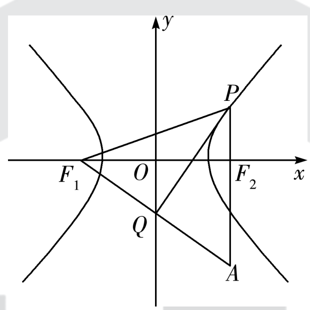
命题意图 本题考查椭圆的性质.

解析 设椭圆的右焦点为 F',焦距为 $2c$. 连接 PF',QF'. 根据椭圆对称性可知四边形 $PFQF'$ 为平行四边形,则 $|QF|=|PF'|$,且由$\angle PFQ=60°$,可得$\angle FPF'=120°$,所以$|PF|+|PF'|=5|PF'|=2a$,则$|PF'|=\frac{2}{5}a$,$|PF|=\frac{8}{5}a$. 由余弦定理可得$(2c)^2=|PF|^2+|PF'|^2-2|PF|\cdot|PF'|\cos 120°=\frac{64}{25}a^2+\frac{4}{25}a^2-2\times\frac{8}{5}a\cdot\frac{2}{5}a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$,所以 $c^2=\frac{21}{25}a^2$,所以椭圆的离心率 $e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{21}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$.

12. **答案** C

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 如图所示,连接 F_1Q 并延长,交直线 PF_2 于点 A. 由已知可得直线 PA 与 y 轴平行,O 为 F_1F_2 的中点,所以 Q 为线段 F_1A 的中点,且$|OQ|=\frac{1}{2}|AF_2|$. 又因为 PQ 是$\angle F_1PA$ 的平分线,由三角形的“三线共点”性质可得 $PQ\perp AF_1$,所以$|PF_1|=|PA|$. 根据双曲线的定义,有 $2a=|PF_1|-|PF_2|=|PA|-|PF_2|=|AF_2|$,所以 $|OQ|=\frac{1}{2}|AF_2|=a=2$.



二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

命题意图 本题考查直线与直线平行的性质.

解析 $\because$ 直线 l_1 与 l_2 平行,$\therefore \frac{3}{18}=\frac{-a}{-9}\neq\frac{-4}{2a}$,解得 $a=\frac{3}{2}$,$\therefore$ 直线 l_1:$6x-3y-8=0$,直线 l_2:$6x-3y+1=0$,$\therefore$ 直线 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\frac{|-8-1|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

14. **答案** $4(\sqrt{2}-1)$

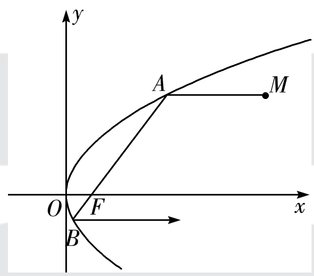
命题意图 本题考查圆与圆的位置关系.

解析 设圆 C 的半径为 r,则$|CA|=|CE|=|CF|=r$,易知四边形 $OECF$ 为正方形,所以$|OC|=\sqrt{2}r$,所以$|OA|=(\sqrt{2}+1)r=4$,所以 $r=\frac{4}{1+\sqrt{2}}=4(\sqrt{2}-1)$.

15. **答案**　4

命题意图　本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析　如图所示,由 $y^2=2x$,得焦点 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,将 $y=2$ 代入 $y^2=2x$,得 $x=2$,可得 $A(2,2)$,直线 AB 经过 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,所以 $k_{AB}=k_{AF}=\frac{0-2}{\frac{1}{2}-2}=\frac{4}{3}$,故直线 AB 的方程为 $y=\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$,与 $y^2=2x$ 联立,得 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{8}$,得 B 点横坐标为 $\frac{1}{8}$,故 $\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}=4$.



16. **答案**　$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

命题意图　本题考查椭圆的方程与性质.

解析　设 C 的半焦距为 $c(c>0)$,由题可知 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $a^2=2c^2=2b^2$. 设 $|PF_1|=m,|PF_2|=n$,由已知得

$$\begin{cases} m^2+n^2-2mn\cos 60^\circ=(2c)^2, \\ m+n=2a, \\ \frac{1}{2}mn\sin 60^\circ=\sqrt{3}, \end{cases}$$ 解得 $\begin{cases} a^2=6, \\ b^2=3, \end{cases}$ 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查直线的方程,直线与圆的位置关系.

解析　(Ⅰ)由已知得 l 的斜率为 $k=-\frac{3}{4}$,所以 m 的斜率为 $k'=-\frac{3}{4}$, ……………………………(2 分)

又 m 过点 $N(0,-1)$,由点斜式方程可知 m 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x-1$,即 $3x+4y+4=0$. ………………(5 分)

(Ⅱ)因为 m 与圆 C 相交,圆心 $C(1,0)$ 到 m 的距离为 $d=\frac{|3+4|}{5}=\frac{7}{5}$, ……………………………………(7 分)

圆 C 的半径为 $r=\sqrt{3}$,

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3-\frac{49}{25}}=\frac{2\sqrt{26}}{5}$. ……………………………………………………(10 分)

18. **命题意图**　本题考查双曲线的方程,双曲线与直线的位置关系.

解析　(Ⅰ)由题可知 C 的一条渐近线为 $y=\sqrt{3}x$,可设 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=\lambda$, ………………………(2 分)

又点 $(\sqrt{2},-\sqrt{3})$ 在双曲线上,代入得 $(\sqrt{2})^2-\frac{(-\sqrt{3})^2}{3}=\lambda$,解得 $\lambda=1$, ……………………………(4 分)

即双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，得 l 的方程为 $y=x+2$，…………………………………（6 分）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}y=x+2,\\3x^2-y^2=3,\end{cases}$ 整理得 $2x^2-4x-7=0$，………………………………………………（8 分）

则 $x_1x_2=-\frac{7}{2}$. ……………………………………………………………………………………（9 分）

所以 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=(x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)$

$=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$

$=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+(x_1+2)(x_2+2)$

$=2x_1x_2+8=1$. ………………………………………………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查椭圆的方程和性质.

解析 （Ⅰ）设 C 的焦距为 $2c(c>0)$，则 $2a=10$，$2c=6$，……………………………………（2 分）

所以 $a=5$，$c=3$，所以 $b^2=a^2-c^2=16$，

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. ……………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{16}=1,\\\frac{x_2^2}{25}+\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$ ………………………………（5 分）

两式相减可得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{25}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{16}$，即 $\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=-\frac{16}{25}$. ………（7 分）

由点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$ 为线段 AB 的中点，得 $x_1+x_2=\frac{1}{2}$，$y_1+y_2=\frac{2}{5}$，…………………………（8 分）

则 l 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{16}{25}\times\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{16}{25}\times\frac{5}{4}=-\frac{4}{5}$，…………………………（10 分）

所以 l 的方程为 $y-\frac{1}{5}=-\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{4}\right)$，即 $4x+5y-2=0$. ……………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查圆的方程，直线与圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，

则 $\begin{cases}2+D+E+F=0,\\4-2E+F=0,\\4+2D+F=0,\end{cases}$ ……………………………………………………………（3 分）

解得 $\begin{cases}D=-1,\\E=1,\\F=-2,\end{cases}$ ……………………………………………………………………（5 分）

故圆 C 的方程为 $x^2+y^2-x+y-2=0$，即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$. …………………（6 分）

（Ⅱ）依题意，圆 C 的圆心为 $C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，半径为$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

在四边形 $MANC$ 中，CA 为 $\angle MAN$ 的平分线，由 $\angle MAN=60°$，得 $\angle MAC=30°$，……………………（7 分）

又 $CM\perp AM$，所以 $|CA|=2\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$. ……………………（8 分）

由点 A 在直线 $y=\frac{1}{2}$上，设点 A 的坐标为$\left(x,\frac{1}{2}\right)$，

则 $|CA|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{10}$，……………………（10 分）

解得 $x=\frac{7}{2}$或 $-\frac{5}{2}$，所以点 A 的坐标为$\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$或$\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$. ……………………（12 分）

21. **命题意图**　本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析　（Ⅰ）因为点 $M(4,m)$ 在抛物线上，所以 $16=2pm$，

由抛物线的定义及 $|MF|=5$，得 $m+\frac{p}{2}=5$，……………………（2 分）

由$\begin{cases}m+\frac{p}{2}=5,\\16=2pm,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=4,\\p=2\end{cases}$或$\begin{cases}m=1,\\p=8\end{cases}$（舍去），……………………（4 分）

所以 C 的方程为 $x^2=4y$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $M(4,4)$，设点 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，

所以 $k_{MA}=\frac{x_1+4}{4}$，$k_{MB}=\frac{x_2+4}{4}$，……………………（7 分）

所以 $k_{MA}k_{MB}=\frac{x_1+4}{4}\times\frac{x_2+4}{4}=1$，得 $x_1x_2+4(x_1+x_2)=0$.（＊）……………………（8 分）

设直线 AB 的方程为 $y=kx+b$，由$\begin{cases}y=kx+b,\\x^2=4y\end{cases}$得 $x^2-4kx-4b=0$，……………………（9 分）

所以 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4b$，

代入（＊）式中得 $-4b+16k=0$，所以 $b=4k$，……………………（11 分）

所以直线 AB 方程为 $y=kx+4k$，即 $y=k(x+4)$，

所以直线 AB 恒过定点$(-4,0)$. ……………………（12 分）

22. **命题意图**　本题考查椭圆的方程与性质.

解析　（Ⅰ）设 C 的右焦点为$(c,0)$，$c>0$，

因为右焦点到直线$\sqrt{2}x+y+2=0$ 的距离为 $2\sqrt{3}$，

所以$\frac{|\sqrt{2}c+2|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$，解得 $c=2\sqrt{2}$. ……………………（2 分）

因为离心率为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=2\sqrt{3}$，……………………（3 分）

所以 $b^2=a^2-c^2=4$，……………………（4 分）

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $A(0,2)$.

当 $k=0$ 时，易知存在直线 l 满足题意.

当 $k\neq 0$ 时，假设存在直线 $l:y=kx+m(k\neq 0)$ 符合题意.

与椭圆方程联立得$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$消去 y 得$(3k^2+1)x^2+6mkx+3m^2-12=0$. ……………………………（6 分）

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则有$\begin{cases}\Delta=36m^2k^2-4(1+3k^2)(3m^2-12)=12(12k^2-m^2+4)>0,\\ x_1+x_2=-\frac{6mk}{1+3k^2},\\ x_1x_2=\frac{3m^2-12}{1+3k^2},\end{cases}$ …………（7 分）

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=k\left(-\frac{6mk}{1+3k^2}\right)+2m=\frac{2m}{1+3k^2}$,

所以 MN 的中点 P 的坐标为$\left(-\frac{3mk}{1+3k^2},\frac{m}{1+3k^2}\right)$. ……………………………………………………（8 分）

因为$|AN|=|AM|$，所以 AP 是线段 MN 的垂直平分线，所以 $AP\perp MN$，显然此时 $m\neq 0$.

所以 $k_{AP}=\frac{\frac{m}{1+3k^2}-2}{-\frac{3mk}{1+3k^2}}=-\frac{m-2-6k^2}{3mk}=-\frac{1}{k}$, ……………………………………………………（9 分）

所以 $m=-1-3k^2$. ……………………………………………………………………………………（10 分）

将其代入 $\Delta=12(12k^2-m^2+4)>0$，并整理得$(k^2-1)(9k^2+3)<0$，得 $-1<k<0$ 或 $0<k<1$.

综上，可知存在满足条件的直线 l，其斜率 k 的取值范围是$(-1,1)$. ……………………………（12 分）