

2024 届高三适应性考试

参考答案及评分参考

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 答案：D

解析：不等式 $x(x-2) \leq 0$ 的解集为 $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ，又 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ ，故选 D.

2. 答案：D

解析：由 $z(2-i) = 4+3i$ 解得 $z = 1+2i$ ，故 $|z| = \sqrt{5}$ ，故选 D.

3. 答案：B

解析：从 2 名男志愿者和 3 名女志愿者中任选 2 名参加支援，共有 $C_5^2 = 10$ 种选法，全是女志愿者的选法共有 $C_3^2 = 3$ 种，所以至少有 1 名男志愿者的选法共有 $10 - 3 = 7$ 种. 故选 B.

4. 答案：D

解析：由题可知，每个白圈在下一行产生一个白圈一个黑圈，一个黑圈在下一行产生一个白圈两个黑圈，

所以有 $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$ ， $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ ，又因为 $a_1 = 0, b_1 = 1$ ，所以 $a_2 = 1, b_2 = 1$ ， $a_3 = 3, b_3 = 2$

$a_4 = 8, b_4 = 5$ ， $a_5 = 21, b_5 = 13$ ， $a_6 = 55, b_6 = 34$ ， $a_7 = 144, b_7 = 89$ ，故选 D.

5. 答案：D

解析：因为 $f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ ，故 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线斜率表示为 $k = f'(1) = a + b$ ，所以 $a + b = 1$ ，

因为 $a > 0, b > 0$ ，所以由基本不等式可得 $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4}$ ，当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时等号成立，

故 ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$ ，故选 D.

6. 答案：B

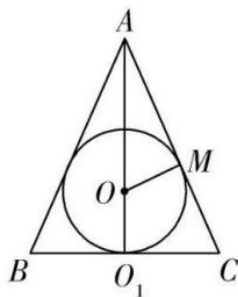
解析：如图为圆锥及圆锥内半径最大球的轴截面图，球心为 O ，设球半径为 r ，

则 $AC = AB = 3$ ， $O_1C = 1$ ，则 $AO_1 = 2\sqrt{2}$ ，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AO_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，

$C_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = 8$ ，由等面积法 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} r C_{\triangle ABC}$ 可得 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以该圆锥内半径最大的球的体积为 $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ ，故选 B.



7. 答案: B

解析: 由 $10 \times (2a + 3a + 7a + 6a + 2a) = 1$ 可得 $a = 0.005$, 故 A 错误;

前三个矩形的面积和为 $10 \times (2a + 3a + 7a) = 0.6$, 所以这 100 名学生竞赛成绩的第 60 百分位数为 80, 故 B 正确; 这 100 名学生竞赛成绩的众数为 75, 故 C 错误;

总体中成绩落在 $[70, 80)$ 内的学生人数为 $7a \times 10 \times 1500 = 525$, 故 D 错误. 故选 B.

8. 答案: C

解析: 因为 $y = f(x+3)$ 是偶函数, 所以 $f(x)$ 关于 $x=3$ 对称, 又因为 $y = f(2x+1)$ 也是偶函数, 所

以 $f(-2x+1) = f(2x+1)$, 所以 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 所以 $f(x)$ 的周期为 4, 因为

$y = m \ln|x-1|$ 关于 $x=1$ 对称, 如图所示, 图像在 $x=1$ 右侧至少有四个交点,

当 $m > 0$ 时, 只需 $m \ln 5 \leq 1$,

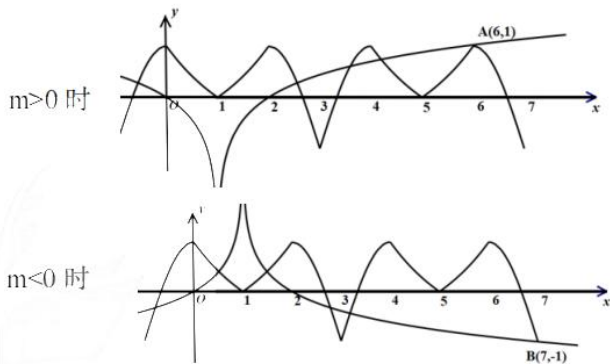
$$\text{即 } 0 < m \leq \frac{1}{\ln 5};$$

同理, 当 $m < 0$ 时, 有 $m \ln 6 \geq -1$,

$$\text{即 } -\frac{1}{\ln 6} \leq m < 0,$$

当 $m = 0$ 时, 显然成立,

故选 C.



二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 答案: ABC

解析: 由题知, $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$,

对于 A, $f(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = -1$, 所以函数 $f(x)$ 的一条对称轴为 $x = \frac{2}{3}\pi$, 故 A 正确;

对于 B, $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$, 当 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取最大值为 $\frac{1}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$, 单调增区间应满足 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 解得

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 所以单调增区间为 } \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z},$$

因为 $(0, \frac{\pi}{6}) \subseteq [-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi]$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{6})$ 单调递增, 故 C 正确;

对于 D, $y = \sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得 $y = \sin 2(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$,

再向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度得到 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

10. 答案: AC

解析: 因为 $AB=2$, $AC=4$, AM 为 $\angle BAC$ 的角平分线, 所以 $BM:MC=1:2$, 则 $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

因为 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \rangle = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = 2$,

所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2 = 4$. 故选 AC.

11. 答案: AD

解析: 依题意得 $M(-2,0)$, 直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$, 联立得 $\begin{cases} y^2=8x \\ y=k(x+2) \end{cases}$,

消去 y 得 $k^2x^2 + (4k^2-8)x + 4k^2 = 0$,

因为直线 l 与抛物线相交 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 所以 $\begin{cases} k^2 \neq 0 \\ (4k^2-8)^2 - 16k^4 > 0 \end{cases}$,

解得 $-1 < k < 1$ 且 $k \neq 0$, 故 C 错误;

因为 $x_1x_2 = \frac{4k^2}{k^2} = 4$, 所以 $y_1^2y_2^2 = 8x_1 \times 8x_2 = 64 \times 4 = 256$, 易知 y_1, y_2 同号, 所以 $y_1y_2 = 16$,

于是 A 正确; B 错误;

由于 $\overrightarrow{FA} = (x_1-2, y_1)$, $\overrightarrow{FB} = (x_2-2, y_2)$, 所以 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4 + y_1y_2$

$= 4 - 2 \times \frac{8-4k^2}{k^2} + 4 + 16 = 32 - \frac{16}{k^2}$, 显然当 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$, 此时 $\angle AFB$ 为直角, 即

以 AB 为直径的圆经过点 F , 故 D 正确. 故选 AD.

12. 答案: ABC

解析:

对于 A, 易知 $D_1C_1 \parallel AB$, $\angle C_1D_1B_1 = 45^\circ$, 所以 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{2} \times 2 \times \cos 45^\circ = 2$, A 正确;

对于 B, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0,0,0)$, $A_1(2,2,2)$,

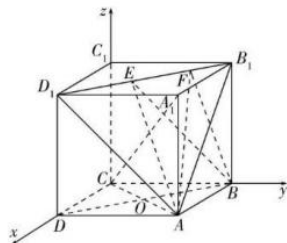
$A(2,2,0)$, $D_1(2,0,2)$, $B_1(0,2,2)$,

所以 $\overrightarrow{CA_1} = (2,2,2)$, $\overrightarrow{AD_1} = (0,-2,2)$, $\overrightarrow{AB_1} = (-2,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0$, $\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$, 即 $\overrightarrow{CA_1} \perp \overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{CA_1} \perp \overrightarrow{AB_1}$,

因为 $AD_1 \cap AB_1 = A$, $AD_1, AB_1 \subset$ 平面 AD_1B_1 ,

所以 $A_1C \perp$ 平面 AD_1B_1 , 又 $AE \subset$ 平面 AD_1B_1 , 所以 $A_1C \perp AE$, B 正确;



对于 C, 连接 BD , AC , 交于点 O , 则 $AC \perp BD$,

因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $DD_1 \perp AC$, 又 $BD \cap DD_1 = D$, $BD, DD_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D ,

所以 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D , 所以

$$V_{A-BEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle BEF} \times AO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times EF \times BB_1 \times AB \times \sin 45^\circ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3},$$

又 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 2 \times 2 \times 2 = 8$, 所以正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是三棱锥 $A-BEF$ 的体积的 12 倍, C 正确;

对于 D, 当点 E 在 D_1 处, F 为 B_1D_1 的中点时, 异面直线 AE, BF 所成的角是 $\angle FBC_1$,

当 E 在 B_1D_1 的中点时, F 在 B_1 的位置, 异面直线 AE, BF 所成的角是 $\angle EAA_1$, 显然两个角不相等, 所以 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案: $\frac{9}{10}$

$$\text{解析: } \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1 + \sin \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10}.$$

14. 答案: -14

解析: $(x+y)^7$ 的展开式中 x^2y^5 的系数为 $C_7^5 = 21$, x^3y^4 的系数为 $C_7^4 = 35$, 因此 $(1 - \frac{y}{x})(x+y)^7$ 的展开式中 x^2y^5 的系数为 $C_7^5 - C_7^4 = -14$.

15. 答案: $\frac{35}{128}, \frac{7}{64}$

$$\text{解析: } C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{35}{128}, C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{64}.$$

16. 答案: $\frac{\sqrt{5}}{3}$

解析: 因为 $PM = 2MN, PF_1 = 2PF_2$ 所以 $F_2N \parallel F_1M$, 且 $F_2N = \frac{1}{2}F_1M$, 延长 MF_1 并延长交椭圆于点 Q

则由对称性可设 $F_1Q = F_2N = t, F_1M = 2t, F_2M = 4t, F_2Q = 2a - t$, 因为 $F_1M + F_2M = 2a$,

所以 $t = \frac{a}{3}$. 则由 $QM = a, F_2M = \frac{4a}{3}, F_2Q = \frac{5a}{3}$, 所以 $\angle QMF_2 = 90^\circ$, 在 $\triangle F_1MF_2$ 中, 由

$$F_1 M^2 + F_2 M^2 = F_2 F_1^2 \text{ 可得离心率 } e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：

$$(1) \text{ 选①：因为 } \sqrt{3}\sin C - \sin A = \frac{c\sin C - b\sin B}{a},$$

在 $\triangle ABC$ 中，将正弦定理代入化简可得：

$$\sqrt{3}c - a = \frac{c^2 - b^2}{a}, \text{ 即 } \sqrt{3}ac - a^2 = c^2 - b^2, \text{ 即 } \sqrt{3}ac = a^2 + c^2 - b^2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中，由余弦定理可得：} \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{6}; \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

选②：因为 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 $\sqrt{3}$ 且 $b = \sqrt{3}$ ，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得：

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B} = 2\sqrt{3}, \text{ 解得 } \sin B = \frac{1}{2}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } B < A, \text{ 所以 } B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{6}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } B = \frac{\pi}{6}, a + c = 3 + \sqrt{3}, b = \sqrt{3},$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中，由余弦定理可得：} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } ac = 3\sqrt{3}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解：

$$(1) \text{ 因为 } a_1 = 1, \text{ 所以 } \frac{a_1}{1} = 1, \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \left\{ \frac{a_n}{n} \right\} \text{ 是公差为 } \frac{1}{2} \text{ 的等差数列，所以 } \frac{a_n}{n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{n+1} > 0, \text{ 所以 } T_n < 2, \text{ 得证.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解:

(1) 因为 $AB = AP = 2, BC = 1$, 所以可解得 $AC = \sqrt{5}, CD = 2\sqrt{5}$,

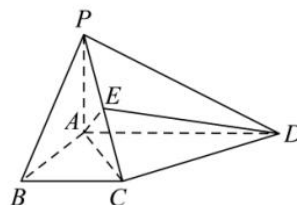
又因为 $AD = 5$, 所以 $AC^2 + CD^2 = AD^2$

所以 $AC \perp CD$,

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$,

所以 $CD \perp$ 平面 PAC ,

所以 $AE \perp CD$.



$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 以点 A 为坐标原点, 分别以 AB, AD, AP 所在的直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 所以 $A(0,0,0), D(0,5,0), C(2,1,0), P(0,0,2), E\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$

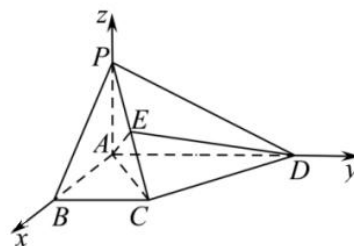
$$\text{则 } \overrightarrow{CD} = (-2, 4, 0), \overrightarrow{AE} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{AD} = (0, 5, 0)$$

$$\text{则 } \overrightarrow{CD} = (-2, 4, 0), \overrightarrow{AE} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{AD} = (0, 5, 0) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 AED 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases},$$

$$\text{得 } \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$



$$\text{令 } z = 1, \text{ 可得平面 } AED \text{ 的一个法向量为 } \vec{n} = (-1, 0, 1). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设 CD 与平面 AED 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \cos \langle \overrightarrow{CD}, \vec{n} \rangle = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } CD \text{ 与平面 } AED \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{10}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解:

$$(1) \text{ 设每箱这种蔬菜能在该超市销售为事件 } A, \text{ 则 } P(A) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5},$$

即每箱这种蔬菜能在该超市销售的概率为 $\frac{2}{5}$ 4 分

(2) X 的所有可能取值为 300, 150, 0, -150. 6 分

$$\text{因为 } P(X=300) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}, \quad P(X=150) = C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{36}{125},$$

$$P(X=0) = C_3^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}, \quad P(X=-150) = C_3^0 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}.$$

所以 X 的分布列为

X	300	150	0	-150
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

$$E(X) = 300 \times \frac{8}{125} + 150 \times \frac{36}{125} + 0 \times \frac{54}{125} + (-150) \times \frac{27}{125} = 30. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解:

(1) 有题意可知 $P\left(-c, \frac{b^2}{a}\right), A_2(a, 0)$

因为 $A_2B \parallel OP$, 所以 $-\frac{b^2}{ac} = -\frac{b}{2a}$, 即 $c = 2b$, 所以 $a = \sqrt{3}b$ 2 分

因为 $|F_1A_2| = 2 + \sqrt{3}$, 所以 $a + c = (2 + \sqrt{3})b = 2 + \sqrt{3}$, 所以 $b = 1, c = 2, a = \sqrt{3}$

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 4 分

(2) 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 直线 $CD: x = ty + 2\sqrt{3}$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \\ x = ty + 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ 可得, } (t^2 - 3)y^2 + 4\sqrt{3}ty + 9 = 0, \text{ 由 } \begin{cases} t^2 - 3 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{9}{t^2 - 3} > 0 \end{cases} \text{ 可得 } t > \sqrt{3} \text{ 或 } t < -\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{-4\sqrt{3}t}{t^2 - 3}, y_1 \cdot y_2 = \frac{9}{t^2 - 3}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } A_1C: y = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{3}}(x + \sqrt{3}) \quad \text{①}$$

$$\text{直线 } A_2D: y = \frac{y_2}{x_2 - \sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) \quad \text{②}$$

$$y_1 \cdot y_2 = -\frac{9}{4\sqrt{3}t}(y_1 + y_2) \quad \text{③}$$

$$\text{由①} \div \text{②可得} \frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} = \frac{y_2(x_1+\sqrt{3})}{y_1(x_2-\sqrt{3})} = \frac{y_2(ty_1+3\sqrt{3})}{y_1(ty_2+\sqrt{3})} = \frac{ty_1y_2+3\sqrt{3}y_2}{ty_1y_2+\sqrt{3}y_1} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{把③代入上式化简可得} \frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} = -3, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{解得} x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以点} M \text{ 在定直线} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 上.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解:

$$(1) \text{ 函数} f(x) \text{ 的定义域为} (0, +\infty), \text{ 且} f'(x) = 1 - \frac{a}{x}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{① 当} a \leq 0 \text{ 时, } f'(x) > 0 \text{ 恒成立, } f(x) \text{ 在} (0, +\infty) \text{ 上单调递增; } \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{② 当} a > 0 \text{ 时, 令} f'(x) = 0 \text{ 得} x = a,$$

$$\text{当} 0 < x \leq a \text{ 时, } f'(x) \leq 0; \text{ 当} x > a \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

$$\text{所以函数} f(x) \text{ 在} (0, a] \text{ 上单调递减, 在} (a, +\infty) \text{ 单调递增.} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) f(x) \text{ 的定义域为} (0, +\infty), \text{ 由} xf'(x) < -e(a+e), \text{ 整理得} x^2 - ax \ln x + e(a+e) < 0,$$

$$\text{即存在} x \in [1, e] \text{ 使} x - a \ln x + \frac{e^2 + ae}{x} < 0 \text{ 成立, } \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{令} g(x) = x - a \ln x + \frac{e^2 + ae}{x}, \text{ 则} g'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{e^2 + ae}{x^2} = \frac{x^2 - e^2 - a - \frac{e^2 + ae}{x}}{x^2} = \frac{x^3 - e^2x - ax - e^2 - e}{x^3} = \frac{x^3 - (e^2 + e)x - e}{x^3},$$

$$\text{因为} x > 0, \text{ 所以} x + e > 0, \text{ 令} g'(x) = 0, \text{ 则} x = e + a. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因为} x \in [1, e],$$

$$\text{所以, 若} e + a \leq 1, \text{ 即} a \leq 1 - e \text{ 时, } g'(x) \geq 0 \text{ 在} [1, e] \text{ 上恒成立, 所以} g(x) \text{ 在} [1, e] \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{只需} g(1) = 1 + e^2 + ae < 0, \text{ 得} a < \frac{-1 - e^2}{e} = -e - \frac{1}{e}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{若} e + a \geq e, \text{ 即} a \geq 0 \text{ 时, } g'(x) \leq 0 \text{ 在} [1, e] \text{ 上恒成立, 所以} g(x) \text{ 在} [1, e] \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{只需} g(e) = e - a + e + a < 0, \text{ 不成立.} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{若} 1 < e + a < e, \text{ 即} 1 - e < a < 0 \text{ 时, 当} x \in [1, e + a] \text{ 时, } g'(x) < 0, g(x) \text{ 单调递减,}$$

$$\text{当} x \in (e + a, e] \text{ 时, } g'(x) > 0, g(x) \text{ 单调递增,}$$

所以 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上的极小值为 $g(a+e) = a+e - a\ln(a+e) + e$,

只需 $g(a+e) = a+e - a\ln(a+e) + e < 0$, 即 $\frac{a+2e}{a} > \ln(a+e)$, 而当 $1-e < a < 0$ 时,

$\frac{a+2e}{a} < 0$, $0 < \ln(a+e) < 1$, 所以 $\frac{a+2e}{a} > \ln(a+e)$ 不成立. 11 分

综上 a 的取值范围为 $(-\infty, -e - \frac{1}{e})$ 12 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线