2022学年第二学期高中期末调测
高一数学参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 24 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	D	D	C	A	B

二、多项选择题（每小题全部选对的得 3 分，部分选对的得 1 分，有选错或不选的得 0 分，共 12 分）

题号	9	10	11	12
答案	BCD	CD	ABD	ABD

三、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

13．π　　14．$150\sqrt{7}$　　15．9　　16．$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

四、解答题（本大题共 6 小题，共 52 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本题满分 8 分）

解：（1）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$　　……1 分

$=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+|\boldsymbol{b}|^2=2-2\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1$，　　……3 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$．　　……4 分

（2）$|2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|^2=4\boldsymbol{c}^2-4\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^2=3$，　　……7 分

所以 $|2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|^2=\sqrt{3}$．　　……8 分

18．（本题满分 8 分）

解：（1）$V_{A-O_1BC}=V_{O_1-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\times3=\frac{9}{2}$　　……4 分

（2）过 O_1 作 $O_1O\perp$ 平面 $ABCD$ 交平面 $ABCD$ 于点 O，连接 AO_1，AO，

则 $\angle O_1AO$ 就是 AO_1 与平面 $ABCD$ 所成角，　　……6 分

$\because O_1O=3$，$AO=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$AO_1=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，$\therefore\cos\angle O_1AO=\frac{AO}{AO_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$……8 分

19．（本题满分 8 分）

解：（1）易知 $\angle CED=\angle EAB=\alpha$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{DF}{AD}=DF$，　　……1 分

$CE=AD\sin\beta\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta$，$BE=AD\cos\beta\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta$

……3 分

所以 $\sin(\alpha+\beta)=DF=BE+CE=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$．　　……4 分

（2）因为 $BE=CE=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\alpha\cos\beta=CE=BE=\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，

所以 $\tan\alpha=\tan\beta$，$\alpha=\beta$，　　……5 分

所以 $\sin\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha=\frac{1}{3}$，$\sin2\alpha=\frac{2}{3}$，　　……6 分

因为 $\angle BAD=2\alpha<90^\circ$，

所以 $\cos2\beta=\cos2\alpha=\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，　　……7 分

所以 $\sin2\alpha+\cos2\beta=\frac{2+\sqrt{5}}{3}$．　　……8 分

20．（本题满分 8 分）

解：（1）【解析】（1）$a=\frac{1}{2}\times(0.1-0.45-0.025-0.02)=0.005$．　　……1 分

$\bar{x}=50\times0.05+60\times0.25+70\times0.45+80\times0.2+90\times0.05=69$（分）．　　……2 分

众数为 70．　　……3 分

中位数为 69.4．　　……4 分

（2）设 3 名男生分别为 a_1，a_2，a_3，2 名女生分别为 b_1，b_2，则中签的情况为：

$\{a_1,a_2,a_3\}$，$\{a_1,a_2,b_1\}$，$\{a_1,a_2,b_2\}$，$\{a_1,a_3,b_1\}$，$\{a_1,a_3,b_2\}$，$\{a_2,a_3,b_1\}$，

$\{a_2,a_3,b_2\}$，$\{a_1,b_1,b_2\}$，$\{a_1,b_1,b_2\}$，$\{a_3,b_1,b_2\}$，共 10 种，　　……6 分

其中男生比女生多的情况有 7 中，　　……7 分

所以中签者中男生比女生多的概率为 $\frac{7}{10}$．　　……8 分

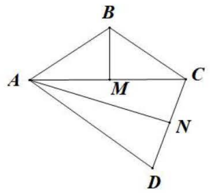
21.（本题满分 10 分）

解：(1)（i）设 $AC=2x(0<x<2)$，$\frac{2}{3}=\cos\angle CAD=\frac{4x^2+4x^2-4}{2\times 2x\times 2x}$，

则 $AC=2x=\sqrt{6}$，$\because \cos B=\frac{2^2+2^2-6}{8}=\frac{1}{4}$，$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2}$， ……3 分

（ii）设 $\angle ADC=\alpha>\frac{\pi}{4}$，取 AC,CD 的中点



分别为 M,N，连接 BM,AN，

$BM\perp AC, AN\perp CD$，

$AD=\frac{1}{\cos\alpha}$，

$AC=2AM=4\sin\alpha$，

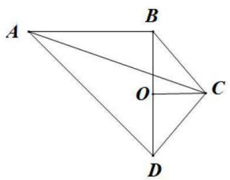
因为 $AC=AD$ 所以 $\frac{1}{\cos\alpha}=4\sin\alpha$，

即 $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$，解得 $2\alpha=\frac{5\pi}{6}$，即 $\angle ABC=\frac{5\pi}{6}$ ……6 分

(2) 作 $CO\perp BD$ 于 O，由余弦定理得 $AB=BD$，$\angle ABD=\frac{\pi}{2}$，

设 $\angle CBO=\theta$，则 $BO=2\cos\theta, AB=BD=4\cos\theta$，

在 $\triangle ABC$ 中，利用余弦定理得：



$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$

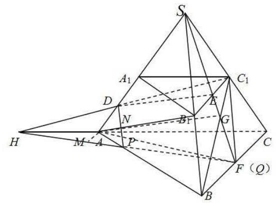
$=16\cos^2\theta+4-2\times 4\cos\theta\times 2\times 2\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$

$=8\sqrt{2}\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})+12\le 12+8\sqrt{2}$

则 AC 的最大值是 $2\sqrt{2}+2$． ……10 分

22.（本题满分 10 分）

解：(1) 延长 AA_1，BB_1，CC_1 交于点 S，



因为 $AB=2A_1B_1=2AA_1$，则三棱锥

$S-ABC$ 为正四面体， ……1 分

连接 SE 并延长，分别交 BC，BC_1 于点

F，G，则 G 为等边 $\triangle SBC$ 的中心，

连接 AG，则 $AG\perp$ 平面 SBC， ……2 分

易知 $\frac{SD}{SA}=\frac{SE}{SG}=\frac{3}{4}$，

所以 $DE//AG$， ……3 分

所以 $DE\perp$ 平面 SBC ……4 分

(2) 解法 1

（i）延长 C_1D，CA 交于点 H，若 C_1，D，P，Q 均在平面 α 上，则 H，P，Q 共线，设 $AB=2A_1B_1=2AA_1=2$，则 $AH=1$，过 A 作 $AM//BC$，交 PQ 于点 M，设 $BQ=k$，则 $CQ=2-k$，$AM=\frac{2-k}{3}$，$\frac{CQ}{BC}=\frac{k}{2}$，所以 $\frac{AP}{BP}=\frac{AM}{BQ}=\frac{2-k}{3k}$，

$\frac{BP}{AB}=\frac{3k}{2+2k}$，所以 $S_{\triangle PBQ}=S_{\triangle ABC}\times\frac{k}{2}\times\frac{3k}{2+2k}$，故 $\frac{k}{2}\times\frac{3k}{2+2k}=\frac{3}{8}$，$k=1$，

所以点 Q 与 F 重合，均为 BC 的中点，

所以 $\frac{BP}{AB}=\frac{3k}{2+2k}=\frac{3}{4}$，即 $BP=\frac{3}{4}AB$ ……6 分

（ii）连接 DP，C_1Q，易知 $DP//C_1Q$，且 $DP=\frac{1}{2}$，$C_1Q=1$，$HC_1=HQ$，

连接 AB_1 交 DP 于点 N，易知 $B_1N\perp DP$，且 $B_1N=\frac{3}{4}AB_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$DP//C_1Q$，

……7 分

$V_{B_1-DPQ}=V_{B-DPQ}=V_{Q-BDP}=\frac{3}{16}V_{Q-ABS}=\frac{3}{32}V_{S-ABC}=\frac{\sqrt{2}}{16}$，

所以 $V_{B_1-DPQC_1}=3V_{B_1-DPQ}=\frac{3\sqrt{2}}{16}$， ……8 分

$DH^2=1^2+\frac{1}{2^2}-2\times1\times\frac{1}{2}\times\cos120°=\frac{7}{4}$，$HC_1=HQ=2DH=\sqrt{7}$，$C_1F=1$，

所以 $\cos\angle C_1HQ=\frac{7+7-1}{14}=\frac{13}{14}$，$\sin\angle C_1HQ=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

$S_{\triangle C_1HQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

$S_{DPQC_1}=\frac{3}{4}S_{\triangle C_1HQ}=\frac{9\sqrt{3}}{16}$， ……9 分

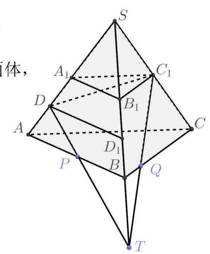
设点 B_1 到平面 $DPQC_1$ 的距离为 d，

则 $V_{B_1-DPQC_1}=\frac{d}{3}\times S_{DPQC_1}=\frac{3\sqrt{2}}{16}$，$d=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 α 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{d}{B_1N}=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$． ……10 分

（2）解法 2.

（i）将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $S-ABC$，



因为 $AB=2A_1B_1=2AA_1$，故正三棱锥 $S-ABC$ 为正四面体，

不妨设 $AB=2$．

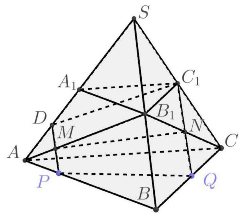
设 $BP=mBA, BQ=nBC$，

则 $\frac{S_{\Delta}PBQ}{S_{\Delta}ABC}=\frac{BP\cdot BQ}{BA\cdot BC}=mn=\frac{3}{8}$.

作 $DD_1 // AB$ 交 SB 于点 D_1

由 $\Delta TPB\sim\Delta TDD_1$，得 $\frac{TB}{TD_1}=\frac{PB}{DD_1}$.

即 $\frac{TB}{TB+\frac{1}{2}}=\frac{2m}{\frac{3}{2}}$.



由 $\Delta TBQ\sim\Delta TB_1C_1$，得 $\frac{TB}{TD_1}=\frac{QB}{C_1B_1}$.

即 $\frac{BT}{1+BT}=\frac{2n}{1}$.

所以 $BT=\frac{m}{\frac{3}{2}-2m}=\frac{2n}{1-2n}$，又 $mn=\frac{3}{8}$，解得 $m=\frac{3}{4}, n=\frac{1}{2}$.

即 $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ……6 分

（ii）正四面体中 $SB\perp$ 平面 B_1AC，又 $SB // DP$，$SB=$ 平面 $\alpha\cap$ 平面 ABB_1A_1，

故 $\angle B_1MN$ 即二面角的平面角 ……8 分

在 ΔB_1AC 中，$B_1A=B_1C=\sqrt{3}, AC=2, B_1M=\frac{3}{4}B_1A, B_1N=\frac{1}{2}B_1C$

解三角形得 $\cos B_1=\frac{1}{3}$

$MN=\frac{3\sqrt{3}}{4}, \sin\angle B_1MN=\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。