2021～2022学年高三年级上学期期中考试

数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：集合、逻辑、函数、导数、三角函数与解三角形、向量、数列、不等式。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M=\{x|x^2-3x\leqslant 0\}$，$N=\{x|\frac{1}{2}<x<4\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\}$　　B. $\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant 3\}$

C. $\{x|3\leqslant x<4\}$　　D. $\{x|0\leqslant x<4\}$

2. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,7)$，$\boldsymbol{b}=(14,-2)$，$\boldsymbol{c}=(-1,1)$，则

A. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=6$　　B. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=6$

C. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-6$　　D. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-6$

3. 若各项均不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=3a_1$，则 $\frac{a_5}{a_3}=$

A. $\frac{9}{5}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{7}{5}$　　D. $\frac{7}{3}$

4. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2x}$，命题 p：$\exists x\in\mathbf{N}$，$f(x)=x$，则

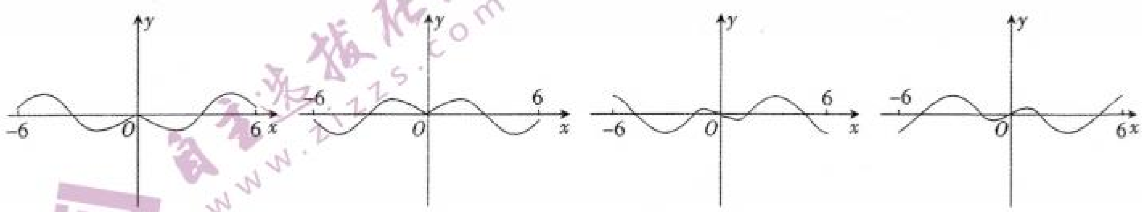
A. $f(x)$ 为幂函数

B. $f(2^x)=2^{x+1}$

C. p 是真命题

D. p 的否定是 $\forall x\in\mathbf{N}$，$f(x)=x$

5. 函数 $f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}\cos x(-6\leqslant x\leqslant 6)$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

6. 已知函数 $f(x)=\frac{f'(1)}{x^2}-\frac{x}{x+1}$，则 $f(1)=$

A. $-\frac{1}{12}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{7}{12}$　　D. $-\frac{3}{2}$

7. 函数 $f(x)=\sin(\pi-2x)+\sqrt{3}\cos(-2x)$ 图象的对称中心的坐标为

A. $(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$　　B. $(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$

C. $(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$　　D. $(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$

8. 2021 年小林大学毕业后，9 月 1 日开始工作，他决定给自己开一张储蓄银行卡，每月的 10 号存钱至该银行卡(假设当天存钱次日到账). 2021 年 9 月 10 日他给卡上存入 1 元，以后每月存的钱数比上个月多一倍，则他这张银行卡账上存钱总额(不含银行利息)首次达到 1 万元的时间为

A. 2022 年 12 月 11 日　　B. 2022 年 11 月 11 日

C. 2022 年 10 月 11 日　　D. 2022 年 9 月 11 日

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=\lg x$ 的定义域为$[2,4]$，则

A. $f(x)$的最大值是最小值的 2 倍

B. 函数 $y=f(-x)$为单调递增函数

C. 函数 $g(x)=f(x)+f(x+1)$的最大值为 $1+\lg 2$

D. 将 $f(x)$的图象向下平移 1 个单位长度，得到 $y=\lg\frac{x}{10}(2\leqslant x\leqslant 4)$的图象

10. 已知角 α 的终边经过点$(-1,2)$，则

A. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-7\cos\alpha}=-\frac{1}{9}$　　B. $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. $\tan(\pi-2\alpha)=-\frac{4}{3}$　　D. 若 α 为钝角，则$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$

11. 已知 $x>y>1$，则

A. $(\frac{x}{y}+1)(\frac{y}{x}+4)$的最小值为 9

B. "$x^2>3x-1$"是"$y>3$"的必要不充分条件

C. $x+y+\frac{4(x-1+y)}{xy-y}$的最小值为 9

D. "$x>y^2$"是"$x>y+2$"的充分不必要条件

12. 已知 $a=\log_2 3$，函数 $f(x)=e^x+\ln x-4$ 的零点为 b，$g(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-x$ 的极小值点为 c，则

A. $a>b$　　B. $c>b$

C. $b>a$　　D. $b>c$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 数列$\{n^2-9n+25\}$的最小项为___▲___.

14. 定义：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两个向量的叉乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 在正△$ABC$ 中，若 $\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC}|^3}=$ ___▲___.

15. 雾灵山，位于河北承德市兴隆县内. 雾灵山历史上曾称伏凌山、孟广硎山、五龙山，明代始称雾灵山. 雾灵山主峰的海拔超过 1000 米，为了测量主峰的海拔，甲和乙分别在海拔都为 1000 米的 A,B 两点观测主峰的最高点 P（PO 与海拔 1000 米所在平面垂直，O 为垂足，且 A,B 都在 O 的正东方向），从 A 点和 B 点观测到 P 点的仰角分别为 $60°,50°$，且 $AB=286$ 米，则雾灵山主峰的海拔约为___▲___米.（结果精确到整数，取 $\sqrt{3}=1.732$，$\tan 50°=1.2$，$286\times\sqrt{3}\times1.2=594.4$）

16. 若 $2x+8x^3+a^2e^{2x}<4x^2+ae^x+a^3e^{3x}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围是___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(1,1)$，且 $f(x)$ 的最小值为负数.

(1)写出 $f(x)$ 的一个解析式（无需写出过程）；

(2)若 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，求 $f(2021)+f(\log_2 0.5)$ 的值.

18.（12 分）

△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $bc\sin A=10\sin B$，且 $\sin B+\cos B=\dfrac{7}{5}$.

(1)求△ABC 的面积；

(2)若 $B>\dfrac{\pi}{4}$，$b=\sqrt{17}$，求△ABC 的周长.

19.(12分)

已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-m$.

(1)当 $m=0$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)讨论 $f(x)$ 零点的个数.

20.(12分)

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$.

(1)若至少存在三个 $x_0\in(0,\frac{\pi}{3})$,使得 $f(x_0)=-1$,求 $f(x)$ 最小正周期的取值范围;

(2)若 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递增,且存在 $m\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,使得 $f(2m-\frac{\pi}{3\omega})>\frac{\sqrt{2}}{2}$,求 ω 的取值范围.

21.(12分)

在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=\frac{1}{4}$,$\frac{(n+1)a_n}{n^2}=\frac{(2n+4)a_{n+1}}{(n+1)^2}$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2)设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,证明:$S_n<2-\frac{n+2}{2^n}$.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=ax^2+x-\ln x(a\geq 0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2)若 $a=2$,且正数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)=4-6x_1x_2$,证明:$x_1+x_2\leq\frac{-1+\sqrt{25-8\ln 2}}{4}$.

2021～2022学年高三年级上学期期中考试
数学参考答案

1. B　因为$M=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，所以$M\cap N=\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant 3\}$.

2. B　因为$1\times 14+7\times(-2)=0$，所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 又$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=6$，故选B.

3. C　$f(x)$不是幂函数，$f(2^x)=2^{\frac{x+1}{2}}$，p的否定是$\forall x\in\mathbf{N}$，$f(x)\neq x$，当且仅当$x=2$时，$f(x)=x$.

4. D　$\because f(-x)=\frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}\cos(-x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}\cos x=-f(x)$，

$\therefore f(x)$为奇函数，$f(x)$的图象关于原点对称，排除A，B.

当$x=\pi$时，$f(\pi)=\frac{1-3^\pi}{1+3^\pi}<0$，排除C，故选D.

5. C　因为$f'(x)=-\frac{2f'(1)}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^2}$，所以$f'(1)=-2f'(1)-\frac{1}{4}$，解得$f'(1)=-\frac{1}{12}$，

则$f(1)=f'(1)-\frac{1}{2}=-\frac{7}{12}$.

6. D　$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，令$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，故函数$f(x)$

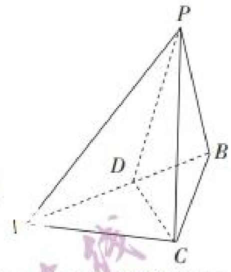
$=\sin(\pi-2x)+\sqrt{3}\cos(-2x)$图象的对称中心的坐标为$(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$.

7. A　如图，取AB的中点D，连接CD，PD. 因为$PA=PB$，$AC=BC$，

所以$PD\perp AB$，$CD\perp AB$，则$\angle CDP$为二面角$P-AB-C$的平面角.

因为$PA=PB=5$，$AC=BC=3$，$AB=2\sqrt{5}$，所以$PD=2\sqrt{5}$，$CD=2$.

又$PC\perp$平面ABC，所以$PC\perp CD$，所以$PC=4$，$\tan\angle CDP=\frac{PC}{CD}=2$.



8. C　依题意可知，小林从第一个月开始，每月所存钱数依次成首项为1，公比为2的等比数列，其前n项和为$\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. 因为$f(n)=2^n-1$为增函数，且$f(13)<10000$，$f(14)>10000$，所以第14个月的10号存完钱后，他这张银行卡账上存钱总额首次达到1万元，即2022年10月11日他这张银行卡账上存钱总额首次达到1万元.

9. BCD　因为角α的终边经过点$(-1,2)$，所以$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=-2$，

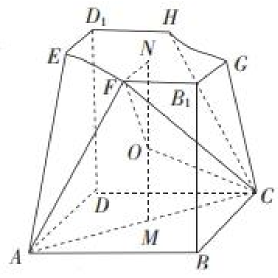
则$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-7\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-7}=\frac{1}{9}$，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=\frac{-2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$. 若$\alpha$为钝角，则由$\tan\alpha=-2<-\sqrt{3}$，得$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$.

【注】本题若由$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=-2$，得$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，不易舍去增根. 事实上，角$\alpha$的终边经过点$(-k,2k)(k>0)$与$\tan\alpha=-2$并不等价.

10. ABD　因为平面ADD_1E//平面$BCGB_1$，$CG\subseteq$平面$BCGB_1$，所以CG//平面ADD_1E，即CG//平面ADE. 依题意可知，弧EF与弧HG均为圆弧，且这两段圆弧的长度为π，所以该几何体的上底面的周长为$4+\pi$，该几何体的体积为$8-\frac{\pi}{3}$.

设M，N分别为下地面、上底面的中心，则三棱锥$F-ABC$的外接球的球心O在MN上. 设$OM=h$，则$(2-h)^2+1^2=h^2+(\sqrt{2})^2$，解得$h=\frac{3}{4}$，从而球$O$的表面积为$4\pi(h^2+2)=\frac{41\pi}{4}$.



11. BC　$(\frac{x}{y}+1)(\frac{y}{x}+4)=5+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当$\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$，即$\frac{y}{x}=2$时，等号成立，但$x>y>1$，

则$\frac{y}{x}\neq 2$，故选项A错误.

若$y>3$，则由$x>y>1$，得$x>3$，所以$x^2>3x>3x-1$，则$x^2>3x-1$. 反之，由$x^2>3x-1$不能推出$y>3$，故选项B正确.

因为$x>y>1$，所以$x+y+\frac{4(x-1+y)}{xy-y}=x+y+\frac{4}{y}+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+y+\frac{4}{y}+1\geqslant 2\sqrt{4}+2\sqrt{4}+1=9$，当且仅

当$x=3$，$y=2$时，等号成立，故$x+y+\frac{4(x-1+y)}{xy-y}$的最小值为9，故选项C正确.

当$x=3$，$y=\sqrt{2}$时，$x>y>1$且$x>y^2$，但$x<y+2$；当$x=6$，$y=3$时，$x>y>1$且$x>y+2$，但$x<y^2$.
所以"$x>y^2$"是"$x>y+2$"的既不充分也不必要条件，故选项D错误.

12. AD　因为$f(1)=e-4<0$，$f(\frac{3}{2})=e^{\frac{3}{2}}+\ln\frac{3}{2}-4=\sqrt{e^3}+\ln\frac{3}{2}-4>\sqrt{16}+\ln\frac{3}{2}-4>0$，

所以$b\in(1,\frac{3}{2})$，因为$\frac{3}{2}=\log_2\sqrt{2^3}<\log_2 3$，所以$a>b$.

$g'(x)=3x^2-x-1$，令$g'(x)=0$，得$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$，

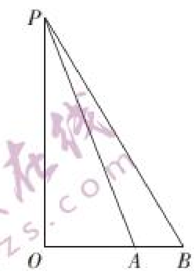
因为$g(x)$在$(-\infty,\frac{1-\sqrt{13}}{6})$，$(\frac{1+\sqrt{13}}{6},+\infty)$上单调递增，在$(\frac{1-\sqrt{13}}{6},\frac{1+\sqrt{13}}{6})$上单调递减，

所以$c=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$，又因为$\frac{1+\sqrt{13}}{6}<1$，所以$c<b$，故$a>b>c$.

13. $\frac{9}{5}$　因为$a_2=3a_1$，所以$a_1+d=3a_1$，$d=2a_1$，故$\frac{a_5}{a_3}=\frac{a_1+4d}{a_1+2d}=\frac{9a_1}{5a_1}=\frac{9}{5}$.

14. $\frac{3}{2}$　设BC边的中点为E，则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$，则$\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}|\overrightarrow{BC}|^2\cdot\overrightarrow{AE}$，

故$\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC}|^3}=\frac{\sqrt{3}|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{3}{2}$.



15. 2117　如图，设$PO=h$米，则$\frac{h}{OA}=\tan 60°$，$\frac{h}{OB}=\tan 50°$，

所以$AB=OB-OA=h(\frac{1}{\tan 50°}-\frac{1}{\tan 60°})$，

则$h=\frac{AB\tan 50°\tan 60°}{\tan 60°-\tan 50°}=\frac{286\times\sqrt{3}\times 1.2}{\sqrt{3}-1.2}=\frac{594.4}{0.532}\approx 1117$.

故雾灵山主峰的海拔约为$1117+1000=2117$米.

16. $(\frac{2}{e},+\infty)$　设函数$f(x)=x-x^2+x^3$，则$f'(x)=1-2x+3x^2>0(\Delta=4-12<0)$，从而$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增. 由$2x+8x^3+a^2e^{2x}<4x^2+ae^x+a^3e^{3x}$，得$2x-4x^2+8x^3<ae^x-a^2e^{2x}+a^3e^{3x}$，即$f(2x)<f(ae^x)$，则$2x<ae^x$，即$\frac{2x}{e^x}<a$. 设函数$g(x)=\frac{2x}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{2-2x}{e^x}$.

当$x<1$时，$g'(x)>0$；当$x>1$时，$g'(x)<0$.

故$g(x)_{\max}=g(1)=\frac{2}{e}$，则$a>\frac{2}{e}$.

17. 解：(1)$f(x)=2x^2-1$. ………………………………………………………… 4分

【注】本题答案不唯一（例如$f(x)=3x^2-2$，$f(x)=2x^4-1$），只要同时满足定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$，$f(1)=1$，且$f(x)$的最小值小于0即可.

(2)因为$f(x)$是周期为4的函数，所以$f(2021)=f(505\times 4+1)=f(1)=1$. ……………… 6分

又因为$f(x)$是偶函数，且$\log_2 0.5=-1$，………………………………………… 7分

所以$f(\log_2 0.5)=f(-1)=f(1)=1$. ………………………………………… 9分

故$f(2021)+f(\log_2 0.5)=2$. ………………………………………………… 10分

18. 解：(1)由$bc\sin A=10\sin B$，得$abc=10b$，………………………………… 1分

即$ac=10$. ……………………………………………………………………… 2分

因为 $\sin B+\cos B=\frac{7}{5}$，所以 $\sin^2 B+\cos^2 B=\sin^2 B+(\frac{7}{5}-\sin B)^2=1$， ………… 3分

整理得 $(5\sin B-3)(5\sin B-4)=0$，解得 $\sin B=\frac{3}{5}$ 或 $\sin B=\frac{4}{5}$， ………… 4分

故△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=5\sin B=3$ 或 4. ………… 6分

(2)因为 $B>\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin B=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{3}{5}$. ………… 7分

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$. ………… 8分

即 $17=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)=(a+c)^2-32$. ………… 10分

解得 $a+c=7$. ………… 11分

故△ABC 的周长为 $7+\sqrt{17}$. ………… 12分

19. 解：(1)因为 $f'(x)=3x^2-6x$， ………… 1分

所以 $f'(1)=-3$， ………… 2分

又 $f(1)=-2$， ………… 3分

故当 $m=0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+2=-3(x-1)$，

即 $y=-3x+1$. ………… 5分

(2)令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 2. ………… 6分

当 $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$ 上单调递增； ………… 7分

当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减. ………… 8分

从而 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)=-4-m$，极大值为 $f(0)=-m$. ………… 9分

当 $m<-4$ 或 $m>0$ 时，$f(x)$ 只有一个零点，即零点的个数为 1； ………… 10分

当 $m=-4$ 或 $m=0$ 时，$f(x)$ 有两个零点，即零点的个数为 2； ………… 11分

当 $-4<m<0$ 时，$f(x)$ 有三个零点，即零点的个数为 3. ………… 12分

20. (1)证明：设 F 为 CB 的中点，连接 PF，EF，因为 $\angle DCB=\angle CBA=90°$，所以 $AB/\!/DC/\!/EF$，所以 $\angle EFC=90°$，即 $CB\perp EF$. ………… 1分

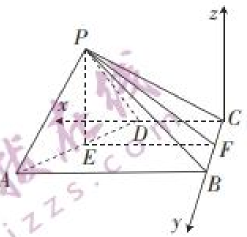
因为 $PB=PC$，F 为 CB 的中点，所以 $CB\perp PF$， ………… 2分

又因为 $EF\cap PF=F$，所以 $CB\perp$ 平面 PEF， ………… 3分

因为 $PE\subset$ 平面 PEF，所以 $PE\perp CB$. ………… 4分

(2)解：因为 $PE\perp AD$，$PE\perp CB$，$EF\cap CB=F$，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$. ………… 5分

所以 $V_{P-ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADB}\cdot PE=\frac{PE}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times2=\sqrt{2}$，则 $PE=\sqrt{2}$. ………… 6分



以 $\overrightarrow{CD}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，

则 $D(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$A(3,2,0)$，$E(2,1,0)$，$P(2,1,\sqrt{2})$， ………… 7分

所以 $\overrightarrow{BA}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(2,-1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DP}=(1,1,\sqrt{2})$. ………… 8分

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3x=0,\\ 2x-y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},1)$. ………… 10分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{DP},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$， ………… 11分

所以 DP 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………… 12分

21. (1)解：∵ $\frac{(n+1)a_n}{n^2}=\frac{(2n+4)a_{n+1}}{(n+1)^2}$，∴ $\frac{(n+1+1)a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)a_n}{n^2}$， ………… 1分

又 $\frac{(1+1)a_1}{1^2}=\frac{1}{2}$，∴数列 $\{\frac{(n+1)a_n}{n^2}\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列， ………… 3分

从而 $\frac{(n+1)a_n}{n^2}=(\frac{1}{2})^n$， ………… 4分

则 $a_n=\frac{n^2}{(n+1)\cdot2^n}$. ………… 5分

(2)证明：$\because a_n=\dfrac{n^2}{(n+1)\cdot 2^n}=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{n}{2^n}<\dfrac{n}{2^n}$，…………6分

$\therefore S_n<\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$. …………7分

设 $T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，则$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n+1}}$，…………8分

两式相减得$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$，…………10分

从而 $T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$. …………11分

故 $S_n<2-\dfrac{n+2}{2^n}$. …………12分

22. (1)解：$f'(x)=2ax+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2+x-1}{x}$，…………1分

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$，则 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增. …………2分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{-1+\sqrt{1+8a}}{4a}$（$x=\dfrac{-1-\sqrt{1+8a}}{4a}<0$ 舍去），…………3分

则 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1+8a}}{4a}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+8a}}{4a},+\infty\right)$上单调递增. …………5分

(2)证明：由 $f(x_1)+f(x_2)=4-6x_1x_2$，且 $a=2$，得 $2(x_1^2+x_2^2)+x_1+x_2-\ln(x_1x_2)=4-6x_1x_2$，
整理得 $2(x_1+x_2)^2+x_1+x_2=4-2x_1x_2+\ln(x_1x_2)$. …………7分
令 $x_1x_2=t>0$，设函数 $\varphi(t)=4-2t+\ln t$，

则 $\varphi'(t)=-2+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1-2t}{t}$，所以 $\varphi(t)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减，…………9分

所以 $\varphi(t)_{\max}=\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=3-\ln 2$，即 $\varphi(t)\leqslant 3-\ln 2$. …………10分

所以 $2(x_1+x_2)^2+x_1+x_2\leqslant 3-\ln 2$，解得 $x_1+x_2\leqslant\dfrac{-1+\sqrt{25-8\ln 2}}{4}$ …………12分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。