高三数学试卷参考答案(理科)

1. C　$z=\frac{2-2i}{(1+i)^2}=\frac{2-2i}{2i}=-1-i$.

2. D　因为 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 9\}$,$B=\{x\mid x\geqslant 6$ 或 $x\leqslant -3\}$,所以 $A\cap B=\{x\mid 6\leqslant x\leqslant 9\}$.

3. B　$a_{10}=S_{10}-S_9=2^9=512$.

4. A　$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x\in[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$.

5. C　由 $f(x)$ 为偶函数,得 $a=2$,又定义域 $(-6m,m^2+9)$ 关于原点对称,故 $m^2+9-6m=0$,得 $m=3$,则 $g(x)=\log_2(x-2)+3$,故 $g(x)_{\max}=g(10)=6$.

6. D　$i=1,a=2,S=0+1+2=3<50$;

$i=2,a=4,S=3+2+4=9<50$;

$i=3,a=8,S=9+3+8=20<50$;

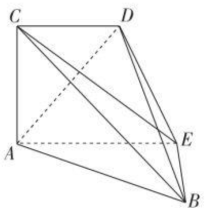
$i=4,a=16,S=20+4+16=40<50$;

$i=5,a=32,S=40+5+32=77>50$.

跳出循环,故 $i=5$.

7. B　四名学生参加三科竞赛,每科冠军都有四种情况,共有 $4^3=64$ 种,三科竞赛冠军分别来自三个不同班级共有 $C_2^1A_3^3=12$ 种不同情况,故所求概率为 $\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$.

8. A　由题意,如图所示,$AC\perp AB$,$AC\perp CD$,过点 A 作 CD 的平行线 AE,则 $AC\perp$ 平面 ABE,且 $\angle EAB$ 为 30° 或 150°,从 B 点向 AE 作垂线,垂足为 E,易证 $BE\perp$ 平面 ACD.



点 B 到平面 ACD 的距离 $BE=AB\cdot\sin\angle EAB=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD=6$,则四面体 $ABCD$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot BE=5$.

9. C　因为 $a_{n+1}=-\frac{1}{3}S_nS_{n+1}$,所以 $S_{n+1}-S_n=-\frac{1}{3}S_nS_{n+1}$,所以 $\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=\frac{1}{3}$.

又 $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{2}$,所以 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项,$\frac{1}{3}$ 为公差的等差数列,

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{22}}=22\times\frac{1}{2}+\frac{22\times 21}{2}\times\frac{1}{3}=88$.

10. A　设该正四面体的棱长为 a,外接球的半径为 R,内切球的半径为 r,

由 $R^2=(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2$,得 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

由 $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot a)\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=4\times\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot a)\cdot r$,得 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$.

因为 $4\pi(R^2-r^2)=12\pi$,所以 $a=3$.

11. D　过 P 作准线的垂线交准线于 M(图略),则 $|PM|=|PF|$,由 $|PH|=k|PF|$,可得 $k=\frac{|PH|}{|PF|}=\frac{|PH|}{|PM|}$.设

$P(\frac{y_0^2}{4},y_0)$，则 $k=\frac{|PH|}{|PM|}=\frac{\sqrt{(\frac{y_0^2}{4}+1)^2+y_0^2}}{\frac{y_0^2}{4}+1}$，令 $t=\frac{y_0^2}{4}+1$，则 $k=\frac{|PH|}{|PM|}=\frac{\sqrt{t^2+4(t-1)}}{t}=\sqrt{1+\frac{4}{t}-\frac{4}{t^2}}=\sqrt{-4(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+2}$，当 $t=2$ 时，k 取到最大值，即当 $t=\frac{y_0^2}{4}+1=2$ 时，k 取到最大值，此时 $y_0=\pm2$. 不妨设 $P(1,2)$，又因为双曲线的焦点坐标为 $(\pm1,0)$，所以可设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{1-a^2}=1$，将 $P(1,2)$ 代入上式，求得 $a^2=3-2\sqrt{2}$，所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3-2\sqrt{2}}-\frac{y^2}{2\sqrt{2}-2}=1$.

12. B　因为 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，所以 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CO}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}\rangle=|\overrightarrow{CA}|\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|^2=18$，同理 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=32$.

因为 $\tan\angle ACB=\sqrt{7}$，所以 $\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=m\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CA}^2=12\sqrt{2}m+36n=18,\\ \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=m\overrightarrow{CB}^2+n\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=64m+12\sqrt{2}n=32,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2\sqrt{2}m+6n=3,\\ 16m+3\sqrt{2}n=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{16-3\sqrt{2}}{28},\\ n=\frac{12-4\sqrt{2}}{21},\end{cases}$ 故 $m-n=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

13. 5　由 $(1+2)^n=3^n=243$，得 $n=5$.

14. -2　$f'(x)=6x+ae^x$，$f'(0)=a=-2$.

15. 4　若 $\frac{x^2}{5-\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-1}=1$ 表示椭圆，则 $\begin{cases}5-\lambda>0,\\ \lambda-1<0,\end{cases}$ 得 $\lambda<1$，设离心率为 e，则 $e^2=\frac{4}{5-\lambda}=\lambda$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=4$，两解均不合题意；若 $\frac{x^2}{5-\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-1}=1$ 表示双曲线，则 $(5-\lambda)(\lambda-1)>0$，得 $1<\lambda<5$，设离心率为 e，则 $e^2=\frac{4}{5-\lambda}=\lambda$，得 $\lambda=1$(舍去)或 $\lambda=4$.

16. $3+\sqrt{5}$　设 $f(x)$ 的“完美区间”为 $[a,b]$，易知 $b>a\geqslant0$.

当 $0<b\leqslant1$ 时，由 $f(x)$ 的图象知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}f(a)=1-a^2=b,\\ f(b)=1-b^2=a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=1,\end{cases}$

此时 $2(b-a)=2$.

当 $b>1$ 时，①若 $a=0$，则 $f(b)=b^2-1=b>1$，解得 $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，此时 $2(b-a)=1+\sqrt{5}$；

②若 $0<a\leqslant1$，则最小值为 $f(1)=0\neq a$，不合题意；

③若 $a>1$，则由图象知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}f(a)=a^2-1=a,\\ f(b)=b^2-1=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\\ b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ (舍去).

综上，函数 $f(x)$ 的所有“完美区间”的“复区间长度”的和为 $3+\sqrt{5}$.

17. 解：(1) $\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$，…………………………………… 3 分

$\therefore 3=9-3bc$，$\therefore bc=2$，…………………………………………………………………… 4 分

$\therefore S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………………………… 6 分

(2) $\because \cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}, a=\sqrt{3}, b+c=3$,

$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=3+(3-b)^2-2\sqrt{3}\times(3-b)\times\frac{\sqrt{3}}{3}$, ………………………… 8 分

$\therefore b=c=\frac{3}{2}$. ……………………………………………………………………………… 10 分

$\because \cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore \frac{b}{\sin B}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$, ………………………………………… 11 分

$\therefore$ $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{3\sqrt{6}}{8}$. …………………………………………………………… 12 分

18. 解:(1)根据题意,可得

$\mu=\frac{5\times10+15\times185+25\times265+35\times400+45\times115+55\times25}{1000}=30$. ……………………… 3 分

又 $12=30-2\times9, 48=30+2\times9$,所以 $P(12\leqslant Y\leqslant48)=0.9544$,所以 $1000\times0.9544\approx954$ 人.

故答对题数在 $(12,48]$ 内的人数约为 954. ………………………………………………………… 5 分

(2)由条件知,X 的可能取值为 0,10,20,30,40.

$P(X=0)=(\frac{3}{10})^2=\frac{9}{100}$; $P(X=10)=C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$;

$P(X=20)=(\frac{1}{2})^2+C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{37}{100}$; $P(X=30)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$;

$P(X=40)=(\frac{1}{5})^2=\frac{1}{25}$. ……………………………………………………………………… 10 分

X 的分布列为

X	0	10	20	30	40
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$

$EX=0\times\frac{9}{100}+10\times\frac{3}{10}+20\times\frac{37}{100}+30\times\frac{1}{5}+40\times\frac{1}{25}=18$ 元. ………………………… 12 分

19. (1)证明:记 SD 的中点为 G,连接 GF, GA. ……………………………………………………… 1 分

因为 E,F 分别为 AB, SC 的中点,

则 $GF \parallel CD$,且 $GF=\frac{1}{2}CD$. ……………………………………………………………… 2 分

因为 $AE \parallel CD$,且 $AE=\frac{1}{2}CD$,

所以 $GF \parallel AE$ 且 $GF=AE$, ………………………………………………………………… 3 分

所以四边形 $GFEA$ 为平行四边形,

则 $EF \parallel AG$. ………………………………………………………………………………… 4 分

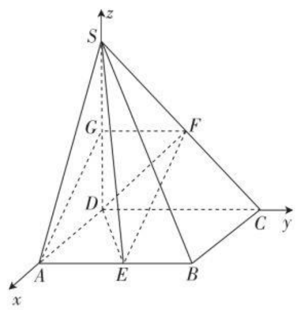
又 $EF \not\subset$ 平面 SAD, $AG \subset$ 平面 SAD,

所以 $EF \parallel$ 平面 SAD. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)解:以 D 为原点,分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DS}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $S(0,0,8)$，$D(0,0,0)$，$E(4,2,0)$，$F(0,2,4)$，

$\overrightarrow{DE}=(4,2,0)$，$\overrightarrow{DF}=(0,2,4)$，$\overrightarrow{EF}=(-4,0,4)$，$\overrightarrow{ES}=(-4,-2,8)$． ⋯ 7 分



设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}=4x_1+2y_1=0,\\ \overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{m}=2y_1+4z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=2$，得 $\boldsymbol{m}=(2,-4,2)$． ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 9 分

设平面 SEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=-4x_2+4z_2=0,\\ \overrightarrow{ES}\cdot\boldsymbol{n}=-4x_2-2y_2+8z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,4,2)$． ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 11 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{1}{3}$，

设二面角 $D-EF-S$ 为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

即二面角 $D-EF-S$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$． ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 12 分

20．解：(1)设 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，则 $|\boldsymbol{m}|=|(x+\sqrt{2},y)|=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+y^2}=|PF_1|$，

$|\boldsymbol{n}|=|(x-\sqrt{2},y)|=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}=|PF_2|$．

又 $|\boldsymbol{m}|+|\boldsymbol{n}|=4$，$|PF_1|+|PF_2|=4$， ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 2 分

由椭圆的定义可知 P 的轨迹是以 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$ 为焦点，4 为长轴的椭圆.

故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 5 分

(2)由题意可知直线 l 的斜率一定存在，设直线 l 的方程为 $y=kx(k>0)$，

与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 联立可得 $(1+2k^2)x^2=4$，

所以 $x=\dfrac{\pm 2}{\sqrt{2k^2+1}}$，$M(\dfrac{-2}{\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}})$，$N(\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{2k}{\sqrt{2k^2+1}})$． ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 6 分

点 H 的坐标为 $(\dfrac{-2}{\sqrt{2k^2+1}},0)$，直线 HN 的方程为 $y=\dfrac{k}{2}(x+\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}})$，

代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，可得 $(\dfrac{k^2}{2}+1)x^2+\dfrac{2k^2x}{\sqrt{2k^2+1}}+\dfrac{-6k^2-4}{2k^2+1}=0$，

所以 $x_Q\cdot x_N=\dfrac{-6k^2-4}{(\dfrac{k^2}{2}+1)\cdot(2k^2+1)}$． ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 7 分

因为 $x_N=\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}}$，所以 $x_Q=-\dfrac{6k^2+4}{(k^2+2)\cdot\sqrt{2k^2+1}}$，

Q 的坐标为 $(-\dfrac{6k^2+4}{(k^2+2)\cdot\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{-2k^3}{(k^2+2)\cdot\sqrt{2k^2+1}})$， ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 8 分

于是 $k_{QM}=-\dfrac{1}{k}$，所以 $k_{QM}\cdot k_{MN}=-1$，即 $QM\perp MN$． ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 9 分

因为 $|MN|=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}}$，$|QM|=\dfrac{4k\sqrt{k^2+1}}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}$，

所以 $S_{\triangle QMN}=\frac{1}{2}\cdot|QM|\cdot|MN|=\frac{8(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2}$. ………………………………………… 10 分

令 $f(k)=\frac{8(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2}(k>0)$，$f'(k)=\frac{-8(k+1)(k-1)(2k^4+3k^2+2)}{(2k^4+5k^2+2)^2}$，由 $f'(k)>0$，可得 $0<k<1$，$f(k)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，因此当 $k=1$ 时，函数 $f(k)$ 有最大值，最大值为 $f(1)=\frac{16}{9}$，即 $S_{\triangle QMN}$ 的最大值为 $\frac{16}{9}$. ………………………………………… 12 分

21. (1)解：$H(x)=f'(x)-g(x)=\ln x-ax^2+(a-2)x+1$，

$H'(x)=\frac{1}{x}-2ax+(a-2)=\frac{-2ax^2+(a-2)x+1}{x}=\frac{(-2x+1)(ax+1)}{x}$. ………………………… 1 分

当 $a\geqslant 0$ 时，$H(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，$H(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 2 分

当 $-2<a<0$ 时，令 $H'(x)>0$，得 $x\in(-\frac{1}{a},+\infty)\cup(0,\frac{1}{2})$，所以 $H(x)$ 在 $(-\frac{1}{a},+\infty)$，$(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增；令 $H'(x)<0$，得 $x\in(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$，所以 $H(x)$ 在 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$ 上单调递减. ………………………… 3 分

当 $a=-2$ 时，$H'(x)\geqslant 0$，$H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… 4 分

当 $a<-2$ 时，令 $H'(x)>0$，得 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)\cup(0,-\frac{1}{a})$，所以 $H(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{a})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增；令 $H'(x)<0$，得 $x\in(-\frac{1}{a},\frac{1}{2})$，所以 $H(x)$ 在 $(-\frac{1}{a},\frac{1}{2})$ 上单调递减. ………………………… 5 分

(2)证明：$G(x)=g(x)-(a-2)x=ax^2$，

因为函数 $f(x)$ 的图象与 $G(x)$ 的图象有两个不同交点，

所以关于 x 的方程 $ax^2=x\ln x-1$，即 $ax=\ln x-\frac{1}{x}$ 有两个不同的根.

由题知 $\ln x_1-\frac{1}{x_1}=ax_1$①，$\ln x_2-\frac{1}{x_2}=ax_2$②，

①+②得 $\ln(x_1x_2)-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=a(x_1+x_2)$③，

②−①得 $\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=a(x_2-x_1)$④.

由③，④得 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}$，不妨设 $0<x_1<x_2$，记 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$.

令 $F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则 $F'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)}>0$， ………………………… 8 分

所以 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(t)>F(1)=0$，

则 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，即 $\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$，所以 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}>2$.

因为 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}<\ln(x_1x_2)-\frac{4\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}=\ln(x_1x_2)-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}=2\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$.

所以 $2\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}>2$，即 $\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>1$.

令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{2}{x}$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… 10 分

又 $\ln(\sqrt{2}\mathrm{e})-\frac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\ln 2+1-\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}<1$，所以 $\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>1>\ln(\sqrt{2}\mathrm{e})-\frac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}}$，

即 $\varphi(\sqrt{x_1x_2})>\varphi(\sqrt{2}\mathrm{e})$，所以 $x_1x_2>2\mathrm{e}^2$. ······ 11 分

两边同时取对数可得 $\ln(x_1x_2)>2+\ln 2$，得证. ······ 12 分

22. 解：(1)将曲线 C：$\begin{cases}x=3+2\cos\beta,\\ y=2\sin\beta\end{cases}$ (β 为参数)，消参得 $(x-3)^2+y^2=4$， ······ 3 分

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha,\\ y=-2+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数，$0\leqslant\alpha<\pi$). ······ 5 分

(2)设 A,B 对应的参数分别为 t_A,t_B，将直线 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程，

整理得 $t^2-4t(\sin\alpha+2\cos\alpha)+16=0$，······ 6 分

所以 $t_A+t_B=4(\sin\alpha+2\cos\alpha)$，$t_A\cdot t_B=16$. ······ 7 分

因为 $|MB|=2|MA|$，所以 $t_B=2t_A$，

因此 $t_A=\frac{4}{3}(\sin\alpha+2\cos\alpha)$，$t_B=\frac{8}{3}(\sin\alpha+2\cos\alpha)$，······ 8 分

所以 $t_A\cdot t_B=\frac{32}{9}(\sin\alpha+2\cos\alpha)^2=16$，展开整理可得 $\frac{3}{4}\cos 2\alpha=1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$，

解得 $\tan\alpha=1$ 或 $\frac{1}{7}$. ······ 10 分

23. (1)解：令 $f(x)=|2x-7|+|2x-3m|$，则关于 x 的不等式 $|2x-7|+|2x-3m|\geqslant 4m$ 的解集为 $\mathbf{R}$，

等价于 $f(x)_{\min}\geqslant 4m$. ······ 1 分

因为 $|2x-7|+|2x-3m|\geqslant|(2x-7)-(2x-3m)|=|3m-7|$.

当且仅当 $(2x-7)(2x-3m)\leqslant 0$ 时取等号，······ 3 分

所以 $f(x)_{\min}=|3m-7|$.

由 $|3m-7|\geqslant 4m$，得 $m\leqslant 1$，所以 $N=1$. ······ 5 分

(2)证明：要证 $16ab+4bc+ac\geqslant 49abc$，只需证 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{16}{c}\geqslant 49$. ······ 6 分

因为 $\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geqslant 2\sqrt{4}=4$，$\frac{16a}{c}+\frac{4c}{a}\geqslant 2\sqrt{64}=16$，$\frac{16b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 2\sqrt{16}=8$， ······ 8 分

所以 $(a+b+c)(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{16}{c})=21+(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a})+(\frac{16a}{c}+\frac{4c}{a})+(\frac{16b}{c}+\frac{c}{b})\geqslant 49$，······ 9 分

当且仅当 $a=\frac{2}{7}$，$b=\frac{1}{7}$，$c=\frac{4}{7}$ 时，等号成立. ······ 10 分