万州二中 2022-2023 学年高 2023 届高三上期 12 月月考

数学试题 2022.12.4

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\left\{x\mid ax^2+2x-3=0\right\}$ 至多有 1 个真子集，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a \bullet -\frac{1}{3}$　　　　B. a卂$-\frac{1}{3}$

C. $a=0$　　　　D. $a=0$ 或 $a \bullet -\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据真子集的个数可得 $M=\varnothing$ 或者 M 为单元素集，进而根据方程的根可求解.

【详解】由于集合 $M=\left\{x\mid ax^2+2x-3=0\right\}$ 至多有 1 个真子集，则集合 M 中的元素个数至多一个，故 $M=\varnothing$ 或者 M 为单元素集，

当 $M=\varnothing$ 时，则 $a\neq 0$ 且 $\Delta=4+12a<0$，解得 $a<-\frac{1}{3}$，

当 M 为单元素集，则 M 中只有一个元素，当 $a=0$ 时，$M=\left\{x|2x-3=0\right\}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$ 符合题意，当 $a\neq 0$ 时，

则 $\Delta=4+12a=0$，解得 $a=-\frac{1}{3}$，

综上，$a \bullet -\frac{1}{3}$ 或 $a=0$，

故选：D

2. 设 $\frac{2z+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=3+\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A. 1　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. 2　　　　D. $\frac{5}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】计算 $z=2-\frac{3}{2}\mathrm{i}$，再计算模长得到答案.

【详解】$\frac{2z+i}{1-i}=3+i$，则 $z=\frac{(3+i)(1-i)-i}{2}=\frac{4-3i}{2}=2-\frac{3}{2}i$，故 $|z|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$.

故选：D

3. 已知事件A与事件B相互独立，且$P(A)=0.2$，$P(B)=0.5$，则$P(A\cup B)=$（　　）

A. 0.7　　B. 0.6　　C. 0.5　　D. 0.4

【答案】B

【解析】

【分析】已知事件A与事件B相互独立，则$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$可求.

【详解】事件A与事件B相互独立，

$\therefore P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-(1-0.2)(1-0.5)=0.6$.

故选：B.

4. 在古代，斗笠作为挡雨遮阳的器具，用竹篾夹油纸或竹叶棕丝等编织而成，其形状可以看成一个圆锥体，在《诗经》有"何蓑何笠"的句子，说明它很早就为人所用.已知某款斗笠如图所示，它的母线长为$2\sqrt{2}$，侧面展开图是一个半圆，则该斗笠的底面半径为（　　）

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】侧面展开图一个半圆，则此半圆的弧长等于底面圆周长，由此求出底面半径.

【详解】设底面半径为r，底面圆周长$2\pi r$，

斗笠母线长$l=2\sqrt{2}$，侧面展开图一个半圆，则此半圆的弧长$\frac{1}{2}\times 2\pi\cdot l=l\cdot\pi$，

所以$l\cdot\pi=2\pi r\Rightarrow r=\frac{l}{2}=\sqrt{2}$，

故选：C.

5. 设向量$\vec{a}=(1,-3),\vec{b}=(-2,4),\vec{c}=(-1,-2)$，若表示向量$4\vec{a},4\vec{b}-2\vec{c},2(\vec{a}-\vec{c}),\vec{d}$的有向线段首尾相接能构成四边形，则向量$\vec{d}$为（　　）

A. $(2,6)$　　B. $(-2,6)$　　C. $(2,-6)$　　D. $(-2,-6)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量线性运算的坐标表示，结合题意求解即可.

【详解】由题可知：$4\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}+2\vec{a}-2\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$，

即$\vec{d}=-6\vec{a}-4\vec{b}+4\vec{c}=(-6,18)+(8,-16)+(-4,-8)=(-2,-6)$.

故选：D

6. 已知等比数列$\{a_n\}$，满足$\log_2 a_2+\log_2 a_{13}=1$，且$a_5a_6a_8a_9=16$，则数列$\{a_n\}$的公比为（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. ± 2　　D. $\pm\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用对数运算性质可得$a_2a_{13}=2$且$a_2,a_{13}>0$，从而$q>0$，由等比数列性质有$a_2a_{13}=a_6a_9=2$，

所以$a_5a_8=8$，$\frac{a_6a_9}{a_5a_8}=q^2$即可求公比.

【详解】令$\{a_n\}$公比为q，

由$\log_2 a_2+\log_2 a_{13}=\log_2(a_2a_{13})=1=\log_2 2$，

故$a_2a_{13}=2$且$a_2,a_{13}>0$，

所以$a_{13}=a_2q^{11}>0$，则$q>0$，

又$a_2a_{13}=a_6a_9=2$，$a_5a_6a_8a_9=16$，则$a_5a_8=8$，

所以$\frac{a_6a_9}{a_5a_8}=\frac{a_5q\times a_8q}{a_5a_8}=q^2=\frac{1}{4}$，

综上，$q=\frac{1}{2}$.

故选：B.

7. 在直角坐标系xoy中，点$A(0,3)$，直线$l: y=2x-4$，设圆C的半径为1，圆心在l上，若圆C上存在唯一一点M，使得$|MA|=2|MO|$，则圆心C的非零横坐标为（　　）

A. $\frac{12}{5}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{11}{5}$　　D. $\frac{5}{11}$

【答案】A

【解析】

【分析】设$M(x,y)$，由$|MA|=2|MO|$得到轨迹方程$Q:x^2+(y+1)^2=4$，要想圆C上存在唯一一点M，使得$|MA|=2|MO|$，只需$Q:x^2+(y+1)^2=4$与圆C相切即可，分两圆外切和内切两种情况，列出方程，求出圆心C的坐标，得到答案.

【详解】设$M(x,y)$，由$|MA|=2|MO|$得：$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，

化简得：$x^2+(y+1)^2=4$，即M点的轨迹方程为圆$Q:x^2+(y+1)^2=4$，

其圆心为$(0,-1)$，半径为2，

要想圆C上存在唯一一点M，使得$|MA|=2|MO|$，

只需$Q:x^2+(y+1)^2=4$与圆C相切即可，

设$C(a,2a-4)$，则圆C方程为$(x-a)^2+(y-2a+4)^2=1$，

两圆圆心距为$|QC|=\sqrt{a^2+(2a-4+1)^2}=\sqrt{5a^2-12a+9}$，

因为$x^2+(y+1)^2=4$的半径为2，圆C的半径为1，

故当两圆相外切时，则$|QC|=2+1$，解得：$a=0$或$\frac{12}{5}$，

当两圆内切时，则$|QC|=2-1$，此时$5a^2-12a+8=0$，

由于$\Delta=144-160<0$，无解，

综上：圆心C的非零横坐标为$\frac{12}{5}$

故选：A

8. 已知在$(-\infty,2]$上的连续函数$f(x)$，其导函数为$f'(x)$，满足$\forall x\in(-\infty,2]$，$(x^2-5x+6)f'(x)+(x^2-2x-2)f(x)>0$恒成立，设$a=-2ef(1)$，$b=-12f(0)$，$c=0$，则（　　）

A. $a>c>b$　　　　B. $a>b>c$

C. $c>b>a$　　　　D. $b>a>c$

【答案】D

【解析】

【分析】结合题意，构造函数$g(x)=(x-2)^2\cdot(x-3)\cdot e^x\cdot f(x)$，进而得$x\in(-\infty,2]$，$g(x)$单调递减，再根据函数单调性比较大小.

【详解】令 $g(x)=(x-2)^2\cdot(x-3)\cdot e^x\cdot f(x)$，

$g'(x)=e^x\cdot(x-2)\cdot\left[\left(x^2-5x+6\right)f'(x)+\left(x^2-2x-2\right)f(x)\right]$，

因为 $\forall x\in(-\infty,2]$，$\left(x^2-5x+6\right)f'(x)+\left(x^2-2x-2\right)f(x)>0$ 恒成立，

所以，当 $x\in(-\infty,2]$ 时，$g'(x)\le 0$，$g(x)$ 单调递减，

$g(0)=-12f(0)=b$，$g(1)=-2ef(1)=a$，$g(2)=0=c$，

因为 $g(0)>g(1)>g(2)$，所以 $b>a>c$.

故选：D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有错选的得 0 分.

9. 已知 $P(A)=\frac{1}{2},P\left(\bar{A}|B\right)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，则（　　）

A. $P(AB)=\frac{3}{8}$　　　　B. $P\left(\bar{A}B\right)=\frac{1}{4}$

C. $P\left(B|\bar{A}\right)=\frac{1}{2}$　　　　D. $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据条件概率公式、全概率公式、和事件公式可以判断答案.

【详解】B 选项：$P\left(\bar{A}|B\right)=\dfrac{P\left(\bar{A}B\right)}{P(B)}=\frac{1}{3},\therefore P\left(\bar{A}B\right)=\frac{1}{4}$，对；

C 选项：$P\left(B|\bar{A}\right)=\dfrac{P\left(B\bar{A}\right)}{P\left(\bar{A}\right)}=\dfrac{P\left(\bar{A}|B\right)P(B)}{P\left(\bar{A}\right)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$,C 对；

A 选项：由全概率公式 $P(B)=P(A)P(B|A)+P\left(\bar{A}\right)P\left(B|\bar{A}\right)$ 得：

$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times P(B|A)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2},\therefore P(B|A)=1$,

$\therefore P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}$,A 错；

D 选项：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,D 对；

故选：BCD

10. A、B、C、D、E 五个人并排站在一起，则下列说法正确的有（　　）

A. 若A、B两人站在一起有48种方法　　B. 若A、B不相邻共有12种方法

C. 若A在B左边有60种排法　　D. 若A不站在最左边，B不站最右边，有72种方法

【答案】AC

【解析】

【分析】根据分类加法，分步乘法原理，结合排列的相关知识点，对选项一一分析.

【详解】对于A，先将A，B排列，再看成一个元素，和剩余的3人，

一共4个元素进行全排列，由分步原理可知共有$A_2^2A_4^4=48$种，所以A正确；

对于B，先将A，B之外的3人全排列，产生4个空，再将A，B两元素插空，

所以共有$A_3^3A_4^2=72$种，所以B不正确；

对于C，5人全排列，而其中A在B的左边和A在B的右边是等可能的，

所以A在B的左边的排法有$\frac{1}{2}A_5^5=60$种，所以C正确；

对于D，对A分两种情况：一是若A站在最右边，则剩下的4人全排列有$A_4^4=24$种，

另一个是A不在最左边也不在最右边，则A从中间的3个位置中任选1个，

然后B从除最右边的3个位置中任选1个，最后剩下3人全排列，

即$A_3^1A_3^1A_3^3=54$，由分类加法原理可知共有$24+54=78$种，所以D不正确，

故选：AC.

11. 某摩天轮共有32个乘坐舱，按旋转顺序依次为1~33号（因忌讳，没有13号），并且每相邻两个乘坐舱与旋转中心所成的圆心角均相等，已知乘客在乘坐舱距离底面最近时进入，在t min后距离地面的高度$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,\varphi\in(0,2\pi)\right)$，已知该摩天轮的旋转半径为60m，最高点距地面135m，旋转一周大约30min，现有甲乘客乘坐11号乘坐舱，当甲乘坐摩天轮15min时，乙距离地面的高度为$\left(75+30\sqrt{2}\right)$m，则乙所乘坐的舱号为（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 15　　D. 16

【答案】BD

【解析】

【分析】先由最小正周期求出$\omega=\frac{\pi}{15}$，进而由最高点和最低点与地面的距离求出$\begin{cases}A=60\\B=75\end{cases}$，由甲乘坐摩天轮15min时，距底面为最大高度，求出$\varphi=\frac{3\pi}{2}$，得到解析式，令$f(t_0)=75+30\sqrt{2}$求出$t_0=\frac{45}{4}$min或

$\frac{75}{4}$min，求出每相邻两个乘坐舱旋转到同一高度的时间间隔，分别求出$t_0=\frac{45}{4}$min 和$\frac{75}{4}$min 时，甲乙相差的乘坐舱个数，得到答案.

【详解】由题意得：$T=30$ min，故$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$，

摩天轮最低点距底面$135-60\times 2=15$m，

故$\begin{cases}A+B=135\\-A+B=15\end{cases}$，解得：$\begin{cases}A=60\\B=75\end{cases}$，

故$f(t)=60\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+75$，

由于$T=30$ min，故甲乘坐摩天轮 15min 时，距地面为最大高度，

即$f(15)=60\sin\left(\frac{\pi}{15}\times 15+\varphi\right)+75=135$，

故$\sin(\pi+\varphi)=1$，

因为$\varphi\in(0,2\pi)$，所以$\pi+\varphi\in(\pi,3\pi)$，故$\pi+\varphi=\frac{5\pi}{2}$，

解得：$\varphi=\frac{3\pi}{2}$，

故$f(t)=60\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\frac{3\pi}{2}\right)+75$，

令$f(t_0)=60\sin\left(\frac{\pi}{15}t_0+\frac{3\pi}{2}\right)+75=75+30\sqrt{2}$，其中$t_0\in(0,30)$，

解得：$\sin\left(\frac{\pi}{15}t_0+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

令$\frac{\pi}{15}t_0+\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z$，解得：$t_0=-\frac{75}{4}+30k$，$k\in Z$，

因为$t_0\in(0,30)$，所以$-\frac{75}{4}+30k\in(0,30)$，解得：$k=1$，

此时$t_0=\frac{45}{4}$

令$\frac{\pi}{15}t_0+\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z$，解得：$t_0=-\frac{45}{4}+30k$，$k\in Z$，

因为$t_0\in(0,30)$，所以$-\frac{45}{4}+30k\in(0,30)$，解得：$k=1$，

此时$t_0=\frac{75}{4}$

综上：$t_0=\frac{45}{4}\text{min}$ 或 $\frac{75}{4}\text{min}$，

每相邻两个乘坐舱与旋转中心所成的圆心角为 $\frac{\pi}{16}$，故每相邻两个乘坐舱旋转到同一高度的时间间隔为

$\frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{15}}=\frac{15}{16}\text{min}$，

当 $t_0=\frac{45}{4}\text{min}$ 时，乙比甲晚出发 $15-\frac{45}{4}=\frac{15}{4}\text{min}$，甲乙相差 $\frac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{16}}=4$ 个乘坐舱，

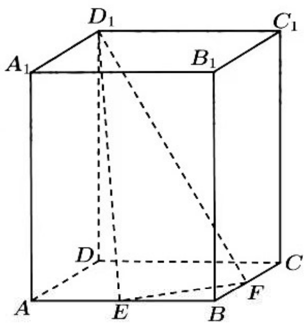
由于没有13号乘坐舱，故乙在16号乘坐舱，

当 $t_0=\frac{75}{4}\text{min}$ 时，乙比甲早出发 $\frac{75}{4}-15=\frac{15}{4}\text{min}$，甲乙相差 $\frac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{16}}=4$ 个乘坐舱，

故乙在7号乘坐舱.

故选：BD

12. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为2的正方形，$AA_1=3$，E，F 分别是 AB，BC 的中点，过点 D_1，E，F 的平面记为 α，则下列说法中正确的有（ ）



A. 平面 α 截直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面的形状为四边形

B. 平面 α 截直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面的面积为 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

C. 平面 α 将直四棱柱分割成的上、下两部分的体积之比为47:25

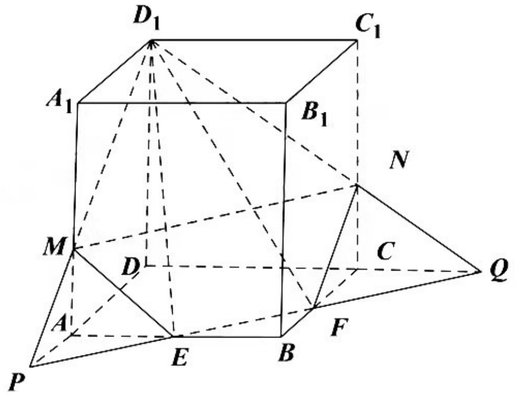
D. 点 B 到平面 α 的距离与点 A_1 到平面的距离之比为1:2

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据所给条件，结合线面关系的性质判定，逐项分析判断即可得解.

【详解】



对 A，延长 DA,DC 交直线 EF 于 P,Q，连接 D_1P,D_1Q，交棱 AA_1,CC_1 于 M,N，

连接 D_1M,ME,D_1N,NF 可得五变形，故 A 错误；

对 B，由平行线分线段成比例可得，$AP=BF=1$,

故 $DP=DD_1=3$，则 $\triangle DD_1P$ 为等腰三角形，由相似三角形可知：

$AM=AP=1$，$A_1M=2$，则 $D_1M=D_1N=2\sqrt{2}$，$ME=EF=FN=\sqrt{2}$，

连接 MN，易知 $MN=2\sqrt{2}$，

因此五边形 D_1MEFN 可以分为等边三角形 D_1MN 和等腰梯形 $MEFN$，

等腰梯形 $MEFN$ 的高 $h=\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

则等腰梯形 $MEFN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

又 $S_{D_1MN}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}$，

所以五边形 D_1MEFN 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$，故 B 正确；

记平面将直四棱柱分割成上下两部分的面积分别为 V_1,V_2，

则 $V_2=V_{D_1-DPQ}-V_{M-PAE}-V_{N-CFQ}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\times3-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{25}{6}$，

所以 $V_1=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_2=12-\frac{25}{6}=\frac{47}{6}$，$V_1:V_2=47:25$，故 C 正确；

对 D，因为平面 α 过线段 AB 的中点 E，所以点 A 到平面 α 的距离与点 B 到平面 α 的距离相等，由平面 α 过 A_1A 的三等分点 M 可知，点 A_1 到平面 α 的距离是点 A 到平面 α 的距离的 2 倍，因此，点 A_1 到平面 α

的距离是点B到平面α的距离的2倍，故D正确.

故选：BCD.

【点睛】本题以空间几何体为基础，考查了平面截空间几何体的相关问题，考查了截面面积以及截面截几何体上下体积之比，同时考查了点到面的距离问题，计算量较大，属于较难题.本题的关键点有：

（1）精确确定平面截空间几何体的截面位置；

（2）根据截面所在位置精确计算相关量.

第Ⅱ卷（非选择题）

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若等差数列$\{a_n\}$满足$a_7+a_8+a_9>0, a_7+a_{10}<0$，则当$n=$______时，$\{a_n\}$的前$n$项和最大.

【答案】8

【解析】

【详解】试题分析：由等差数列的性质，$a_7+a_8+a_9=3a_8$，$a_8>0$，又因为$a_7+a_{10}<0$，所以$a_8+a_9<0$

所以$a_9<0$，所以$S_8>S_7$，$S_8>S_9$，故数列$\{a_n\}$的前8项最大.

考点：等差数列的性质，前n项和的最值，容易题.

14. 若$\sin x+\sin 3x+\sin 5x=a$，$\cos x+\cos 3x+\cos 5x=b$，则$\tan 3x=$______结果用a，b表示.

【答案】$\frac{a}{b}$

【解析】

【分析】由和差化积公式求出$\sin 5x+\sin x=2\sin 3x\cos 2x$，$\cos 5x+\cos x=2\cos 3x\cos 2x$，从而得到$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\tan 3x$，得到答案.

【详解】由和差化积公式得：$\sin 5x+\sin x=2\sin\frac{x+5x}{2}\cos\frac{5x-x}{2}=2\sin 3x\cos 2x$，

$\cos 5x+\cos x=2\cos\frac{x+5x}{2}\cos\frac{5x-x}{2}=2\cos 3x\cos 2x$，

$\sin x+\sin 3x+\sin 5x=2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=\sin 3x\left(2\cos 2x+1\right)$，

$\cos x+\cos 3x+\cos 5x=2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x=\cos 3x\left(2\cos 2x+1\right)$，

故$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 3x\left(2\cos 2x+1\right)}{\cos 3x\left(2\cos 2x+1\right)}=\tan 3x$，

故$\tan 3x=\frac{a}{b}$.

故答案为：$\frac{a}{b}$.

15. 已知空间四边形$ABCD$的各边长及对角线BD的长度均为6，平面$ABD\perp$平面CBD，点M在AC上，且$AM=2MC$，过点M作四边形$ABCD$外接球的截面，则截面面积的最小值为__________.

【答案】12π

【解析】

【分析】先由面面垂直的性质得到$AE\perp$平面CBD，求得AE、CE、OH、AH，从而求得外接球的半径，再由平行线分线段成比例的推论证得H,O,M三点共线，从而求得OM，从而求得截面面积的最小值.

【详解】由题意知$\triangle ABD$和$\triangle BCD$为等边三角形，取BD中点为E，连接AE,CE，

则$AE\perp BD$，

由平面$ABD\perp$平面CBD，平面$ABD\cap$平面$CBD=BD$，$AE\subset$平面ABD

故$AE\perp$平面CBD，$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，则易知$CE=AE=3\sqrt{3}$，

易知球心O在平面BCD的投影为$\triangle BCD$的外心O_1，

在AE上作$OH\perp AE$于H，易得$OH//O_1E,OO_1//HE$，

则在$\mathrm{Rt}\triangle OHA$中，$OH=\sqrt{3},AH=2\sqrt{3}$，

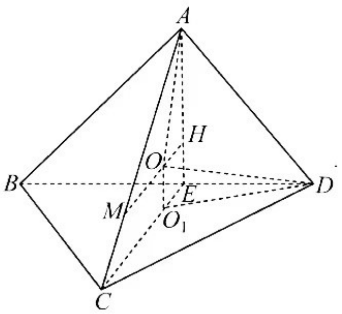
所以外接球半径$r=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{15}$，连接$OM$，

因为$AH=2HE,OH//CE,AM=2MC$，

所以H,O,M三点共线，所以$OM=MH-OH=\frac{2}{3}CE-OH=\sqrt{3}$，

当M为截面圆圆心时截面面积最小，此时截面圆半径为$\sqrt{r^2-OM^2}=\sqrt{\left(\sqrt{15}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$，截面面积为$\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2=12\pi$.

故答案为：12π.



16. 已知曲线$C_1: y=xe^x\left(x>0\right)$和$C_2: y=\dfrac{x-2}{e^{x-2}}$，若直线$l$与$C_1$，$C_2$都相切，且与$C_2$的相切于点$P$，则$P$的横坐标为______.

【答案】$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】设出点P的坐标和与C_1相切的点的坐标，根据公切线的关系，得出两点横坐标的关系并求出与C_1相切的点的横坐标，进而求出P的横坐标.

【详解】由题意，$x>0$，

设l与C_1相切于点$M\left(x_1,y_1\right)$，$P\left(x_2,y_2\right)$

在$C_1: y=xe^x$中， $y'=\left(x+1\right)e^x$， $y_1=x_1e^{x_1}$， $y_1'=\left(x_1+1\right)e^{x_1}$，

在$C_2: y=\dfrac{x-2}{e^{x-2}}$中，$y'=\dfrac{3-x}{e^{x-2}}$，$y_2=\dfrac{x_2-2}{e^{x_2-2}}$，$y_2'=\dfrac{3-x_2}{e^{x_2-2}}$，

∵直线l与C_1，C_2都相切，

$\therefore \left(x_1+1\right)e^{x_1}=\dfrac{3-x_2}{e^{x_2-2}}$，即$\left(x_1+1\right)e^{x_1}=\left(2-x_2+1\right)e^{2-x_2}$，

在$y=\left(x+1\right)e^x$中，函数单调递增，

$\therefore x_1=2-x_2$

$\because \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\left(x_1+1\right)e^{x_1}$，即$\dfrac{x_1e^{x_1}-\dfrac{x_2-2}{e^{x_2-2}}}{x_1-x_2}=\left(x_1+1\right)e^{x_1}$

$\therefore \dfrac{x_1e^{x_1}+x_1e^{x_1}}{x_1-\left(2-x_1\right)}=\left(x_1+1\right)e^{x_1}$，即$\dfrac{x_1}{x_1-1}=x_1+1$，

$\therefore \begin{cases}\dfrac{x_1}{x_1-1}=x_1+1\\ x>0\end{cases}$解得$x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x_2=2-x_1=2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

故选：C.

【点睛】本题考查导数的几何意义求切线方程，考查函数与方程的思想、转化与化归的思想，考查逻辑推理能力、运算求解能力.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=5$，$a_{17}=3a_6$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{2}{n(a_n+3)}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

【答案】（1）$a_n=2n-1$；（2）$\dfrac{n}{n+1}$.

【解析】

【分析】

（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，根据$\begin{cases}a_3=5\\a_{17}=3a_6\end{cases}$，列出$a_1$和$d$的方程组，进而求出$a_1$和$d$，即可求出$\{a_n\}$的通项公式；

（2）由（1）可知$b_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，根据裂项相消法即可求出结果.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

由$\begin{cases}a_3=5\\a_{17}=3a_6\end{cases}$，可得$\begin{cases}a_1+2d=5\\a_1+16d=3(a_1+5d)\end{cases}$

解得$a_1=1, d=2$，

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式可得$a_n=2n-1$；

（2）由（1）可得$b_n=\dfrac{2}{n(a_n+3)}=\dfrac{2}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

所以$S_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}$.

【点睛】本题主要考查了等差数列通项公式的求法，以及裂项相消法在数列求和中的应用，属于基础题.

18. 已知函数$f(x)=\cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)(x\in\mathbf{R})$．

（1）求$f(x)$的最小正周期和单调增区间；

（2）在 ABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c．若$f\left(\dfrac{B}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b=6$，求 ABC的面积的最大值.

【答案】（1）$T=\pi$，$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\right]$，$k\in Z$

（2）$9\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1)利用三角恒等变换求出函数的解析式，根据函数的性质求解；(2)利用边化角转化为三角函数求面积的最大值或者用余弦定理和基本不等式求面积的最大值.

【小问 1 详解】

$f(x)=\cos x\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore f(x)$的周期$T=\pi$，

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$

所以$f(x)$的单调递增区间是$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$，$k\in Z$.

【小问 2 详解】

$\because f\left(\frac{B}{2}\right)=\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)=0$，又$B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

由正弦定理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{6}{\sin\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\sin A\cdot 4\sqrt{3}\sin C\sin B=12\sqrt{3}\sin A\sin C$

$=12\sqrt{3}\sin A\sin\left(\frac{2}{3}\pi-A\right)=12\sqrt{3}\sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)=18\sin A\cos A+6\sqrt{3}\sin^2 A$

$=9\sin 2A+6\sqrt{3}\times\frac{1-\cos 2A}{2}=6\sqrt{3}\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+3\sqrt{3}$

$\because 0<A<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore -\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$，$\therefore (S_{\triangle ABC})_{\max}=9\sqrt{3}$，

当$2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$A=\frac{\pi}{3}$时取得最大值.

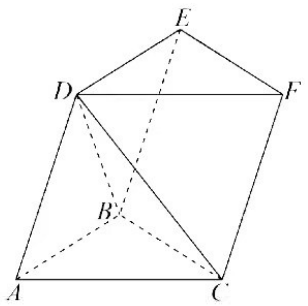
另解：$\because f\left(\frac{B}{2}\right)=\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)=0$，又$B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

由余弦定理知：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow 36=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}=a^2+c^2-ac\ge 2ac-ac=ac$，

即$ac\le 36$，当且仅当$a=c=6$时，等号成立.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\le 9\sqrt{3}$，$\therefore$当$a=c=6$时，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=9\sqrt{3}$.

19. 如图，斜三棱柱$ABC-DEF$中，点D在底面ABC上的射影恰好是AB的中点，且$\angle ABC=90^\circ, AB=BC=AD$.



（1）证明：平面$DBC\perp$平面$ABED$；

（2）求直线CD与平面$BCFE$所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】

【分析】（1）利用线面垂直的性质及判定定理，及面面垂直的判定定理即可得证；

（2）以O为原点，建立空间直角坐标系，利用空间向量法求得线面角.

【小问1详解】

取AB的中点O，连接DO，即点D在底面ABC上的射影为O，$\therefore DO\perp$平面ABC

又$BC\subset$平面ABC，$\therefore DO\perp BC$

又$AB\perp BC$，$DO\cap AB=O, DO, AB\subset$平面$ABED$，则$BC\perp$平面$ABED$

又$BC\subset$平面DBC，所以平面$DBC\perp$平面$ABED$

【小问2详解】

取AC的中点M，连接OM，

以O为原点，分别以OA, OM, OD为x, y, z轴建立空间直角坐标系，设$AB=2$

则$C(-1,2,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$，$B(-1,0,0)$，$F(-2,2,\sqrt{3})$，$E(-2,0,\sqrt{3})$

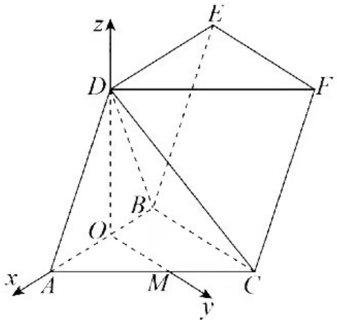
则$\overrightarrow{CD}=(1,-2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,\sqrt{3})$

设平面$BCFE$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

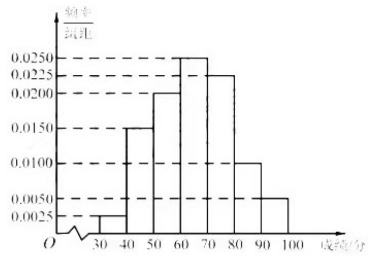
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令$x=\sqrt{3}$，则$\vec{n}=\left(\sqrt{3},0,1\right)$

设直线CD与平面$BCFE$所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{CD},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{1+4+3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$



20. 2021年中国共产党迎来了建党100周年，为了铭记建党历史、缅怀革命先烈、增强爱国主义情怀，某校组织了党史知识竞赛活动，共有200名同学参赛．为了解竞赛成绩的分布情况，将200名同学的竞赛成绩按$[30,40)$、$[40,50)$、$[50,60)$、$[60,70)$、$[70,80)$、$[80,90)$、$[90,100]$分成7组，绘制成了如图所示的频率分布直方图.



（1）求这200名同学竞赛成绩的中位数及竞赛成绩不低于80分的同学人数；

（2）学校决定对竞赛成绩不低于80分的同学中以抽奖的方式进行奖励，其中竞赛成绩不低于90分的同学有两次抽奖机会，低于90分不低于80分的同学只有一次抽奖机会，奖品为党史书籍，每次抽奖的奖品数量（单位：本）及对应的概率如下表：现在从竞赛成绩不低于80分的同学中随机选一名同学，记其获奖书籍的数量为ξ，求ξ的分布列和数学期望.

奖品数量（单位：本）	2	4
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

【答案】(1) 中位数 65，不低于 80 分的同学有 30 人；

(2) 分布列见解析，$E(\xi)=\dfrac{10}{3}$

【解析】

【分析】(1) 先确定中位数所在的组，设中位数为 x，由从左到右频率和为 0.5 列等式求解即可；

(2) ξ 的可能取值为 2，4，6，8，对应的概率 P 分步计算：第一步为不同抽奖次数的概率，第二步为不同抽中本数的概率，最后按定义列出分布列，求数学期望即可.

【小问 1 详解】

$\because (0.0025+0.015+0.020)\times 10=0.375$，$(0.0025+0.015+0.020+0.025)\times 10=0.625$，所以中位数位于 $[60,70)$ 之间，

设这 200 名同学竞赛成绩的中位数为 x，则 $\left[0.0025+0.015+0.020+0.025(x-60)\right]\times 10=0.5$，解得 $x=65$.

竞赛成绩不低于 80 分的学生人数为：$200\times(0.010+0.005)\times 10=30$；

【小问 2 详解】

设这名同学获得书籍的数量为 ξ，则 ξ 的可能取值为 2，4，6，8.

$P(\xi=2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$，$P(\xi=4)=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{48}$，$P(\xi=6)=\dfrac{1}{3}\times C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$，

$P(\xi=8)=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{48}$，

所以 ξ 的分布列为

ξ	2	4	6	8
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$

$E(\xi)=2\times\dfrac{1}{2}+4\times\dfrac{17}{48}+6\times\dfrac{1}{8}+8\times\dfrac{1}{48}=\dfrac{10}{3}$.

21. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，过点 $D(2,0)$ 且垂直于 x 轴的直线 l 与该双曲线 C 交于点 E，F，设直线 EA 的斜率为 k_1，直线 FB 的斜率为 k_2，$k_1\cdot k_2=-1$.

(1) 求曲线 C 的方程；

（2）动点M，N在曲线C上，已知点$P(2,-1)$，直线PM，PN分别与y轴相交的两点关于原点对称，点Q在直线MN上，$PQ\perp MN$，证明：存在定点T，使得$|QT|$为定值．

【答案】（1）$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$；

（2）证明见解析．

【解析】

【分析】（1）利用代入法，结合直线斜率公式进行求解即可；

（2）利用一元二次方程根与系数关系，结合垂直直线的性质进行求解即可．

【小问1详解】

当$l\perp x$轴时，把$x=2$代入双曲线方程中，得$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt{4-a^2}$，

设$E\left(2,\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt{4-a^2}\right)$，$F\left(2,-\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt{4-a^2}\right)$，

$k_1=\frac{\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt{4-a^2}}{2+a}$，$k_2=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt{4-a^2}}{2-a}$

所以$k_1\cdot k_2=\frac{\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt{4-a^2}}{2+a}\cdot\frac{-\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt{4-a^2}}{2-a}=-\frac{3}{a^2}=-1$，得$a=\sqrt{3}$，

所以C的方程：$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$；

【小问2详解】

证明：设直线MN的方程为$y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(2,-1)$

$\begin{cases}y=kx+m\\x^2-y^2=3\end{cases}$，整理得$(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$，

则$1-k^2\neq0$，$\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-m^2-3}{1-k^2}$

直线PM，PN分别与y轴相交的两点为M_1，N_1，

$\therefore$直线PM方程为$y=\frac{y_1+1}{x_1-2}(x-2)-1$，

令 $x=0$，则 $M_1\left(0,\dfrac{x_1+2y_1}{2-x_1}\right)$，同理 $N_1\left(0,\dfrac{x_2+2y_2}{2-x_2}\right)$，

可得 $\dfrac{x_2+2y_1}{2-x_1}+\dfrac{x_2+2y_2}{2-x_2}=0$

$\therefore \dfrac{x_1+2(kx_1+m)}{2-x_1}+\dfrac{x_2+2(kx_2+m)}{2-x_2}=0$

$\left[(2k+1)x_1+2m\right](2-x_2)+\left[(2k+1)x_2+2m\right](2-x_1)=0$

$\therefore (4k+2-2m)(x_1+x_2)-(4k+2)x_1x_2+8m=0$

$\therefore (4k-2m+2)\cdot\dfrac{2km}{1-k^2}-(4k+2)\dfrac{-m^2-3}{1-k^2}+8m=0$

$\therefore (2k-m+1)\cdot 2km+(2k+1)(m^2+3)+4m(1-k^2)=0$

$\therefore 4k^2m-2km^2+2km+2km^2+6k+m^2+3+4m-4mk^2=0$

$\therefore m^2+(2k+4)m+6k+3=0$，$(m+3)(m+2k+1)=0$ 分

当 $m+2k+1=0$ 时，$m=-2k-1$，

此时直线 MN 方程为 $y=k(x-2)-1$ 恒过定点 $P(2,-1)$，显然不可能，

$\therefore m=-3$，直线 MN 方程为 $y=kx-3$，恒过定点 $E(0,-3)$

$\because PQ\perp MN$，设 PE 中点为 T，$\therefore T(1,-2)$

$\therefore |QT|=\dfrac{1}{2}|PE|=\sqrt{2}$ 为定值，$\therefore$ 存在 $T(1,-2)$ 使 $|QT|$ 为定值 $\sqrt{2}$.

【点睛】关键点睛：利用一元二次方程根与系数关系是解题的关键.

22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+1$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）证明，对 $\forall x\in(0,+\infty)$，均有 $f(x)<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$.

【答案】（1）$2x+y-4=0$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求导，利用导数的几何意义进行求解；

（2）将所证不等式转化为$\dfrac{1-x\ln x-x}{x}<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$，构造函数$g(x)=1-x-x\ln x$，利用导数研究其单调性和最值，得到$1-x-x\ln x\le 1+e^{-2}$，再构造函数$h(x)=\ln(x+1)-x$利用导数研究其单调性和最值，得到$0<\ln(x+1)<x$，再利用不等式的性质进行放缩证明.

【小问1详解】

因为$f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+1$

所以$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$，$f(1)=2$，$f'(1)=-2$，

则切线方程为$y-2=-2(x-1)$，即$2x+y-4=0$.

则曲线$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$2x+y-4=0$.

【小问2详解】

若证$f(x)<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$，

即证$f(x)-2=\dfrac{1}{x}-\ln x-1=\dfrac{1-x\ln x-x}{x}<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$，

令$g(x)=1-x-x\ln x$，则$g'(x)=-2-\ln x$

当$x\in\left(0,\ e^{-2}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x\in\left(e^{-2},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以$g(x)_{\max}=g\left(e^{-2}\right)=1+e^{-2}$，即$1-x-x\ln x \bullet 1+e^{-2}$.

令$h(x)=\ln(x+1)-x$，$x>0$，

则$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}<0$，

可知$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$h(x)<h(0)=0$，即当$x>0$时，$0<\ln(x+1)<x$，

从而$0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\ln(x+1)}$，

所以当$0<x<1$时，$1-x-x\ln x>0$，

$$\frac{1-x-x\ln x}{x}\le\frac{1+e^{-2}}{x}<\frac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)},$$

当x开1时，$1-x-x\ln x\le 0$，$\dfrac{1-x-x\ln x}{x}\le 0<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$，

综上所述，对$\forall x\in(0,+\infty)$，均有$f(x)<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$.

【点睛】方法点睛：在利用导数证明不等式时，合理构造函数，将问题转化为求函数的单调性和最值问题是一种常见方法，如本题中两次构造函数：

（1）构造函数$g(x)=1-x-x\ln x$证明$1-x-x\ln x\le 1+e^{-2}$；

（2）构造函数$h(x)=\ln(x+1)-x$证明$0<\ln(x+1)<x$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。