

绝密★启用前

永州一中 2023 年高三元月大联考

数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2(x+1) < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{x | -2 < x < 2\}$

2. 已知 $z \cdot (2 + 3i) = -4 + 7i$, 其中 i 为虚数单位, 则复数 z 在复平面内所对应的点的坐标是 ()

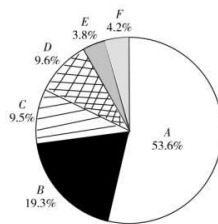
A. $(1, 1)$ B. $(2, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 2)$

3. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_4 + S_7 = -16$, $a_8 = -a_4$, 则 $a_{10} =$ ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 全球智能手机市场销量持续增长乏力已经是不争的事实, 但折叠屏手机却走出逆势, 成为行业唯一增长的高端机品类。下图是某数据公司统计的 2022 年第一季度中国折叠屏手机市场份额。现有 2022 年第一季度中国折叠屏手机市场份额超过 5% 的品牌折叠屏手机各一部, 从中任取 2 部手机, 则其中有 A 品牌折叠屏手机的概率为 ()

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{10}$



5. 在平面内, A, B 是两个定点, C 是动点, 若 $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AB}|$, 则点 C 的轨迹为 ()

A. 圆 B. 椭圆 C. 抛物线 D. 直线

6. 已知直线 $l: 2x + y - 2 = 0$ 是圆 $C: (x-3)^2 + (y-b)^2 = 6$ 的一条对称轴, 设直线 l 与 x 轴的交点为 P , 将直线 l 绕点 P 按顺时针方向旋转 30° 得到直线 l' , 则直线 l' 被圆 C 截得的弦长为 ()

A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

7. 已知 $a = 0.5^{0.6}$, $b = 0.6^{0.5}$, $c = \log_6 5$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

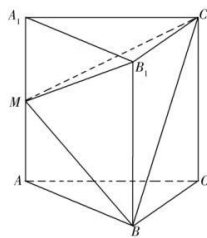
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

8. 四面体 $ABCD$ 的各个顶点都在球 O 的表面上, BA, BC, BD 两两垂直, 且

$AB = \sqrt{11}, BC = 3, BD = 4, E$ 是线段 BC 上一点, 且 $BE = 2EC$, 过 E 作四面体 $ABCD$ 外接球 O 的截面, 则所得截面圆的面积的最大值与最小值之差是 ()

A. 7π B. 9π C. 5π D. 8π

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。



9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论中正确的是 ()

A. π 为函数 $|f(x)|$ 的一个周期

B. $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个对称中心

C. 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上单调递增, 则实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$

D. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 得到一个偶函数的图象

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过抛物线 C 上一点 P 作 l 的垂线, 垂足为 Q , 则下列说法正确的是 ()

A. 准线 l 的方程为 $x = -2$

B. 若过焦点 F 的直线交抛物线 C 于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 且 $x_1 + x_2 = 6$, 则 $|AB| = 8$

C. 若 $E(2, 1)$, 则 $|PE| + |PF|$ 的最小值为 3

D. 延长 PF 交抛物线 C 于点 M , 若 $|PF| = \frac{4}{3}$, 则 $|PM| = \frac{16}{3}$

11. 若实数 x, y 满足 $4^x + 4^y = 2(2^x + 2^y)$, 则 $2^{x-1} + 2^{y-1}$ 的值可以是 ()

A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

12. 如图, 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 1, AA_1 = 2, M$ 为 AA_1 的中点, 直线 B_1M 与平面 ABC 的交点为 O , 则以下结论正确的是 ()

A. $OC = \sqrt{3}$

B. 直线 $OC \parallel$ 平面 BMC_1

C. 在线段 BC_1 上不存在一点 P 使得 $A_1P \perp BC_1$

D. 以 A_1 为球心, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为 $\sqrt{2}\pi$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = x \ln x - 2x + e$, 其中 e 为自然对数的底数, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为_____.

14. $(\sqrt{x} - 1)^5$ 的展开式中所有有理项的系数之和为_____.

15. 已知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $5 \sin x = 2 + \cos 2x$, 则 $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

16. 已知 O 为坐标原点, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 点 $P(x_1, y_1)$ 是 C 的右支上异于顶点的一点, 过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 的平分线的垂线,

垂足是 M , $|MO| = \sqrt{2}$, 若点 $Q(x_2, y_2)$ 满足 $x_2 = y_2$, 则 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 的最小值为

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $\frac{2}{3}S_n = a_n - \frac{2}{3}n - 2$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n + 2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{6}$.

18. (12 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{6}$, 点 D 在边 AB 上且满足 $AD = 3, BD = DC$.

(1) 若 $\triangle ADC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求 $BD^2 + AC^2$ 的值;

(2) 若 $BC = 3$, 求 $\angle B$ 的大小.

19. (12 分)

近年来, 短视频作为以视频为载体的聚合平台, 社交属性愈发突出, 在用户生活中覆盖面越来越广泛, 已逐渐成为社交平台发展的新方向, 同时发展了利用短视频平台进行直播带货, 成就了一批带货主播. 国内短视频领域, 已知甲公司和乙公司两家购物平台所售商品类似, 存在竞争关系.

(1) 现对某时段 100 名观看过这两家短视频的用户与使用这两家购物平台购物的情况进行调查, 得到如下数据:

	选择甲公司购物平台	选择乙公司购物平台	合计
用户年龄段 19-24 岁	40	10	50
用户年龄段 25-34 岁	20	30	50
合计	60	40	100

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 能否认为使用哪家购物平台购物与观看这两家短视频的用户的年龄有关?

(2) (i) 若小李第一天等可能地从甲、乙两家中选一家平台购物, 如果第一天去甲平台, 那么第二天去甲平台的概率为 0.7; 如果第一天去乙平台, 那么第二天去甲平台的概率为 0.8. 求小李第二天去甲平台购物的概率;

(ii) 双十一这天, 甲公司购物平台直播间进行“秒杀”抢购活动, 小李一家三人能下单成功的概率均为 p ($0 < p < 1$), 三人是否抢购成功互不影响. 若 X 为三人下单成功的总人数, 且 $E(X) \geq 1$, 求 p 的取值范围.

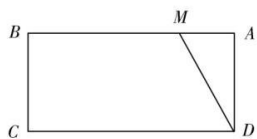
参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

χ^2 独立性检验中几个常用的小概率值和相应的临界值表:

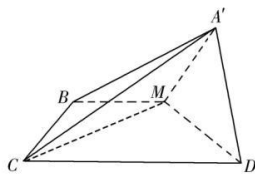
α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20. (12分)

如图①, 已知矩形 $ABCD$ 的长为 4, 宽为 $\sqrt{3}$, 点 M 是边 AB 上的点, 且 $3AM = MB$. 如图②, 将 $\triangle AMD$ 沿 MD 折起到 $\triangle A'MD$ 的位置, 使得平面 $A'MD \perp$ 平面 $BMDC$, 平面 $A'MB \cap$ 平面 $A'CD = l$.



图①



图②

(1) 求证: $l \parallel$ 平面 $BMDC$;

(2) 在线段 DC (不包含端点) 上是否存在一点 P , 使得平面 $A'MP$ 与平面 $A'MC$ 的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$? 若存在, 确定点 P 的位置; 若不存在, 请说明理由.

21. (12分)

已知 O 为坐标原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $x = n$ 与椭圆 C 交于 E, F 两点, 当 $\triangle EF_1F$ 的周长取得最大值 8 时, $|EF| = 3$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 F_2 作斜率存在且不为 0 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 直线 AP 与直线 $x = 4$ 交于点 Q , 记直线 QA, QB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试判断 $|k_1 - k_2|$ 是否为定值, 若是, 求出该定值; 若不是, 说明理由.

22. (12分)

设函数 $f(x) = e^x - ax$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若 $f(x)$ 存在极值, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $a > 0$ 时, 不等式 $xf'(x) \geq a \ln x + 1$ 恒成立 ($f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数), 求实数 a 的值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线