石家庄市 2018-2019 学年高中毕业班模拟考试（二）

理科数学答案

一、选择题　1-5DBADC　6-10 CBABC　11-12 AD

二、填空题　13. 3　14. 12　15. $\frac{5}{2}$　16. $2\sqrt{3}$

三、解答题

17. 解：(1) ∵$\{a_n\}$是等差数列．∴$S_5=5a_3$，又 $S_5=3a_3$，∴$a_3=0$ ………………… 2 分

由 $a_4+a_6=8=2a_5$ 得 $a_5=4$∴$a_5-a_3=2d=4$，∴$d=2$ ………………… 4 分

∴$a_n=a_3+(n-3)d=2(n-3)$． ………………… 6 分

(2) $b_n=2^n\cdot a_n=(n-3)\cdot 2^{n+1}$，

$T_n=(-2)\cdot 2^2+(-1)\cdot 2^3+0\cdot 2^4+\cdots+(n-3)\cdot 2^{n+1}$，

$2T_n=\qquad(-2)\cdot 2^3+(-1)\cdot 2^4+\cdots+(n-4)\cdot 2^{n+1}+(n-3)\cdot 2^{n+2}$ ……………8 分

两式相减得 $2T_n-T_n=2\cdot 2^2-(2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})+(n-3)\cdot 2^{n+2}$ …………………10 分

$=8-\frac{8(1-2^{n-1})}{1-2}+(n-3)\cdot 2^{n+2}$

$=(n-4)\cdot 2^{n+2}+16$

即 $T_n=(n-4)\cdot 2^{n+2}+16$ …………………12 分

18. 解析：(1) 证明：连接 PD 交 CE 于 G 点，连接 FG，

∵点 E 为 PA 中点，点 D 为 AC 中点，

∴点 G 为$\triangle PAC$ 的重心，∴$PG=2GD$，…………2 分

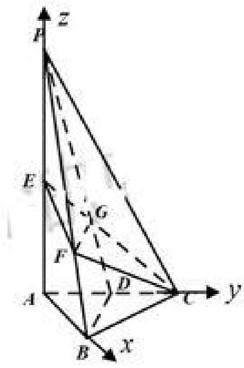
∵$PF=2FB$ ∴$FG\,//\,BD$，…………4 分

又∵$FG\subset$平面 CEF，$BD\not\subset$平面 CEF，∴$BD\,//$平面 CEF．…………5 分

(2) 法一：因为 $AB=AC$，$PB=PC$，$PA=PA$，

所以$\triangle PAB$ 全等于$\triangle PAC$，∵$PA\perp AC$，∴$PA\perp AB$，∴$PA=2$，…………7 分

又∵$AB\perp AC$，则以 AB、AC、AP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 如图所示，



则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,2)$，$E(0,0,1)$，

$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-1,1)$ …………8 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=-x+y=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=-x+2z=0\end{cases}$ 解得 $x=2,y=2,z=1$，即 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$ …………10 分

设直线 CE 与平面 PBC 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{|-2+1|}{\sqrt{2}\times 3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

所以直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ …………12 分

法二：因为 $AB=AC$，$PB=PC$，$PA=PA$，
所以□PAB 全等于□PAC，$\because PA\perp AC$，$\therefore PA\perp AB$，$\therefore PA=2$，…………7 分
过点 E 做 $EH\perp$ 平面 PBC 于点 H，连接 CH，则 $\angle ECH$ 为直线 CE 与平面 ABC 所成角，………8 分
设点 A 到平面 PBC 的距离为 h

$V_{P-ABC}=V_{A-PBC}$，即 $\frac{1}{3}\times S_{\square ABC}\times PA=\frac{1}{3}\times S_{\square PBC}\times h$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times h$，解得 $h=\frac{2}{3}$，…………10 分

因为点 E 为 PA 中点，所以 $EH=\frac{1}{2}h=\frac{1}{3}$，

在 Rt□CEH 中，$CE=\sqrt{2}$，$\sin\angle ECH=\frac{EH}{CE}=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

所以直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$…………12 分

19.【解析】(1) 因为 $\tan A\tan B=\frac{1}{2}$，即 $k_{AC}k_{BC}=-\frac{1}{2}$

设点 $C(x,y)$，则 $\frac{y}{x-2}\cdot\frac{y}{x+2}=-\frac{1}{2}$……………………（2 分）

解得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1(y\neq0)$……………………（4 分）

(2) 令 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

易知直线 MN 不与 x 轴重合，令直线 $MN:x=my-\sqrt{2}$ ………………………………（5 分）

联立得 $(m^2+2)y^2-2\sqrt{2}my-2=0$

易知 $\Delta>0$，$y_1+y_2=\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-2}{m^2+2}<0$……………………（7 分）

由 $S_{\triangle MAB}=2S_{\triangle NAB}$，故 $|y_1|=2|y_2|$，即 $y_1=-2y_2$ ……………………（9 分）

从而 $\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=\frac{-4m^2}{m^2+2}=\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}+2=-\frac{1}{2}$

解得 $m^2=\frac{2}{7}$，即 $m=\pm\frac{\sqrt{14}}{7}$……………………………………（11 分）

所以直线 MN 的方程为 $x=\frac{\sqrt{14}}{7}y-\sqrt{2}$ 或 $x=-\frac{\sqrt{14}}{7}y-\sqrt{2}$ ……………（12 分）

20. 解：(1) 李某月应纳税所得额（含税）为：29600-5000-1000-2000=21600 元
不超过 3000 的部分税额为 $3000\times3\%$=90 元
超过 3000 元至 12000 元的部分税额为 $9000\times10\%$=900 元——————————2 分

超过 12000 元至 25000 元的部分税额为$9600\times20\%$=1920 元

所以李某月应缴纳的个税金额为 90+900+1920=2910 元----------------------4 分

（2）有一个孩子需要赡养老人应纳税所得额（含税）为：20000-5000-1000-2000=12000 元，

月应缴纳的个税金额为：90+900=990 元；-----------------------------------5 分

有一个孩子不需要赡养老人应纳税所得额（含税）为：20000-5000-1000=14000 元，

月应缴纳的个税金额为：90+900+400=1390 元；------------------------------6 分

没有孩子需要赡养老人应纳税所得额（含税）为：20000-5000-2000=13000 元，

月应缴纳的个税金额为：90+900+200=1190 元；------------------------------7 分

没有孩子不需要赡养老人应纳税所得额（含税）为：20000-5000=15000 元，

月应缴纳的个税金额为：90+900+600=1590 元；------------------------------8 分

$$p(X=990)=\frac{3}{5},p(X=1190)=\frac{1}{10},p(X=1390)=\frac{1}{5},p(X=1590)=\frac{1}{10}$$

X	990	1190	1390	1590
p	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

--------------------------------------10 分

$$EX=990\times\frac{3}{5}+1190\times\frac{1}{10}+1390\times\frac{1}{5}+1590\times\frac{1}{10}=1150$$ ------------------------12 分

21.【解析】（1）由 $f(x)<ax+\frac{1}{x}$，即 $\frac{\ln x}{x}<ax$，即 $a>\frac{\ln x}{x^2}$

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，则只需 $a>g(x)_{\max}$ ……………………（1 分）

$g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\sqrt{e}$

所以 $g(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 递减……………………（3 分）

所以 $g(x)_{\max}=g(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$，所以 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2e},+\infty)$ ……………（4 分）

（2）方法一：不妨设 $x_1<x_2$，$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，所以 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

由 $f(1)=1$，$f(\frac{1}{e})=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to0$

所以 $0<m<1$，$\frac{1}{e}<x_1<1<x_2$ ……………………（6 分）

要证 $x_1+x_2>2$，即证 $x_2>2-x_1$

由 $x_2>1$，$2-x_1>1$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，只需证明 $f(x_2)<f(2-x_1)$

由 $f(x_1)=f(x_2)$，只需证明 $f(x_1)<f(2-x_1)$ ……………………（7 分）

令 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，$x\in(0,1)$，只需证明 $g(x)<0$

易知 $g(1)=0$，$g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\frac{-\ln x}{x^2}+\frac{-\ln(2-x)}{(2-x)^2}$

由 $x\in(0,1)$，故 $-\ln x>0$，$x^2<(2-x)^2$，……………………（9 分）

从而 $g'(x) > \frac{-\ln x - \ln(2-x)}{(2-x)^2} = \frac{-\ln[x(2-x)]}{(2-x)^2} > 0$ ……………………（11 分）

从而 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增

由 $g(1)=0$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，证毕 ……………………（12 分）

方法二：不妨设 $x_1 < x_2$，$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$，所以 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

由 $f(1)=1$，$f(\frac{1}{e})=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$

所以 $0<m<1$，$\frac{1}{e}<x_1<1<x_2$ ……………………（6 分）

要证 $x_1+x_2>2$，即证 $x_2>2-x_1$

由 $x_2>1$，$2-x_1>1$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，只需证明 $f(x_2)<f(2-x_1)$

由 $f(x_1)=f(x_2)$，只需证明 $f(x_1)<f(2-x_1)$ ……………………（7 分）

若证 $\frac{1+\ln x_1}{x_1} < \frac{1+\ln(2-x_1)}{2-x_1}$，即 $(2-x_1)\ln x_1 - x_1\ln(2-x_1)+2-2x_1<0$

令 $g(x)=(2-x)\ln x - x\ln(2-x)+2-2x$，只需证明 $x\in(0,1)$ 时 $g(x)<0$ ……………………（8 分）

易知 $g(1)=0$，$g'(x) = -\ln x - \ln(2-x) + \frac{4}{x(2-x)} - 4$

由 $\ln x \le x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等，故 $-\ln x \ge 1-x$ ……………………（10 分）

由 $x\in(0,1)$，从而 $-\ln x - \ln(2-x) > (1-x)+(1-(2-x)) = 0$

由 $x\in(0,1)$，故 $x(2-x)\in(0,1)$，从而 $\frac{4}{x(2-x)}-4>0$，所以 $g'(x)>0$ ……………………（11 分）

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增

又由 $g(1)=0$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，证毕 ……………………（12 分）

方法三：不妨设 $x_1<x_2$，构造函数 $G(x)=f(x)-f(\frac{1}{x})$， ……………………（5 分）

则 $G'(x) = (1-\frac{1}{x^2})\ln x$，$x\in(0,1)$ 时，$G'(x)>0$，$G(x)$ 单调递增， ……………………（7 分）

所以 $G(x)<G(1)=0$，即 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<f(\frac{1}{x})$.

$\because \frac{1}{e}<x_1<1$，故 $f(x_2)=f(x_1)<f(\frac{1}{x_1})$， ……………………（9 分）

又 $\because x_2>1, \frac{1}{x_1}>1$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$\therefore x_2>\frac{1}{x_1}$，即 $x_1x_2>1$，……（11 分）

所以 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}>2$ ……………………（12 分）

方法四：不妨设 $x_1<x_2$，（比值代换）由 $f(x_1)=f(x_2)=m$，即 $1+\ln x_1 = mx_1$，$1+\ln x_2 = mx_2$………（5 分）

两式作差得 $\ln x_1 - \ln x_2 = m(x_1-x_2)$，即 $m=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$ ……………………（6 分）

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注