

阜阳市 2022—2023 学年度高三教学质量统测

数 学 参 考 答 案

一、选择题, 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	B	B	C	D	A	BD	AD	BD	ACD

2. 【解析】因为复数 $1+i$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根,

所以 $(1+i)^2+p(1+i)+q=0$, 解得 $p=-2, q=2$, 所以 $|p+qi|=2\sqrt{2}$

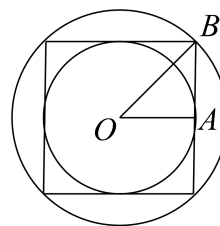
另解: 利用韦达定理可得, $1+i+1-i=2=-p, (1+i)(1-i)=2=q$

解得 $p=-2, q=2$, 所以 $|p+qi|=2\sqrt{2}$

3. 【解析】 $C_6^4(\sqrt{x})^4(-2)^2=60x^2$, 所以 x^2 的系数为 60, 故选 C 项.

4. 【解析】该圆柱的内切球和外接球的截面图如下图所示, 内切球与外接球的体积

之比为 $\frac{\frac{4}{3}\pi OA^3}{\frac{4}{3}\pi OB^3} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



5. 【解析】由 $f(x+1)+f(x)=f(1), f(x+2)+f(x+1)=f(1)$, 可得 $f(x+2)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 2. 令 $x=0$, 代入 $f(x)+f(-x)=f(0)$, 可得 $f(0)=0$, 所以 $f(x)+f(-x)=0$, 故函数 $f(x)$ 为奇函数,

所以 $f(\log_2 \frac{1}{18}) = f(-\log_2 18) = -f(\log_2 18) = -f(\log_2 18 - 4) = -f(\log_2 \frac{9}{8})$

因为 $0 < \log_2 \frac{9}{8} < \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $f(\log_2 \frac{9}{8}) = 2^{\log_2 \frac{9}{8}} = \frac{9}{8}$, 所以 $f(\log_2 \frac{1}{18}) = -\frac{9}{8}$.

6. 【解析】 $f(x) = \frac{\cosh 2x}{\sinh x} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^x - e^{-x}} (x > 0)$, 令 $t = e^x - e^{-x} > 0$, 则 $e^{2x} + e^{-2x} = t^2 + 2$

则 $\frac{\cosh 2x}{\sinh x} = t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $t = \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 故选 C.

7. 【解析】构造函数 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x, (0 < x < \frac{\pi}{2})$,

$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq \frac{2}{\sqrt{\cos x}} - 2 \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,

所以 $f(0.1) > f(0) = 0$, 则 $b > a$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, 由 $e^x \geq x + 1$ 可得, $e^{-0.2} > 1 - 0.2$,

所以 $1 - e^{-0.2} < 0.2$, 故 $c < a$, 故选 D.

8. 【解析】由 $Y(41) = 425, \lambda = \frac{\ln(Y(41))}{41} = \frac{\ln 425}{41} \approx 0.15$,

代入到 R 的计算公式可以得到 $R \approx 1 + 0.15 \times 10 + 0.6 \times (1 - 0.6) \times (0.15 \times 10)^2 = 3.04$.

A 型传染病变异株的基本传染数 $R_0 = [R] = 3$, 感染人数由 1 个初始感染者增加到 9000 人大约需要 n 轮传染, 则每轮新增感染人数为 R_0^n , 经过 n 轮传染,

总共感染人数为: $1 + R_0 + R_0^2 + \dots + R_0^n = \frac{1 - R_0^{n+1}}{1 - R_0}$, 因为 $R_0 = 3$, 由题意可得 $\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \geq 9000$,

解得 $n \geq 9$, 又因为平均感染周期为 7 天, 所以感染人数由 1 个初始感染者增加到 9000 人大约需要 $9 \times 7 = 63$ 天, 故选 A 项.

9. 【解析】易知 A 项错误, B 项正确, 这 10 年的人口出生率的 80% 分位数为 13.70, 故 C 项错误, D 项显然正确. 故选 BD.

10. 【解析】由题意可得, $g(x) = \sin\left[2\omega\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2\omega x + \frac{2\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{3}\right) (0 < \omega < 1)$,

因为 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 是函数 $y = g(x)$ 的图象一个对称中心, 则 $\frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

即 $\omega = k + \frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}$, 因为 $0 < \omega < 1$, 所以 $\omega = \frac{1}{3}$, 故 A 项正确;

$g(x) = \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{9}\right), T = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$, 故 B 项错误;

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{18} \neq \pm 1$, 故 C 项错误;

当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, -\frac{4\pi}{9} \leq \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{9} \leq \frac{7\pi}{18}$, 故 D 项正确.

故选 AD.

11. 【解析】由题意可得, 当 AB 与 x 轴垂直时, 线段 AB 的最小值为 $\frac{2b^2}{a}$, 故 A 项错误;

结合双曲线的定义与圆的切线的性质 $\triangle F_1AB$ 的内切圆与直线 AB 的切点 Q 与 F_2 重合, 故 B 项正确; 结合双曲线的定义与圆的切线的性质可知 $F_1Q = 2a$, F_1 到渐近线的距离为 b, 所以 $b = 2a$, 易得离心率为 $\sqrt{5}$, 故 C 项错误; F_1 关于 P 点的对称点在另一条渐近线上时, 则渐近线与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则其渐近线方程为 $\sqrt{3}x \pm y = 0$, 故 D 项正确;

故选 BD 项.

12. 【解析】对于 A, 易证 $D_1B \perp$ 平面 AB_1C , 所以当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $D_1M \perp$ 平面 AB_1C , 即平面 $AD_1M \perp$ 平面 AB_1C , 故 A 项正确; 对于 B, 由平面 $A_1DC_1 \parallel$ 平面 AB_1C , 又因为 $E \in$ 平面 A_1DC_1 , 所以 M 与 A_1 重合, N 与 C_1 重合, 此时 $\lambda = 0, u = 1$ 不符合题意, 故 B 项错误; 对于 C, 当 $\lambda = u = \frac{1}{2}$ 时, $MN \perp B_1C_1, MN \perp A_1C$, 此时 MN 最小, 最小值为 $\sqrt{2}$, 故 C 项正确; 对于 D, 当 $\lambda = \frac{1}{2}, u = \frac{2}{3}$ 时, 取靠近 D_1 点的三等分点 G, 连接 GE 并延长交 AD 于点 H, 易得点 H 是靠近 A 点的三等分点, 取靠近 B 点的三等分点 P, 易知四边形 GHPN 为截面多边形, 不难求得面积为 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$, 故 D 项正确;

故选 ACD 项.

二、填空题. 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. $\left(0, \frac{1}{16}\right)$

【解析】因为 $x^2 = \frac{1}{4}y$, 故抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点坐标为 $\left(0, \frac{1}{16}\right)$.

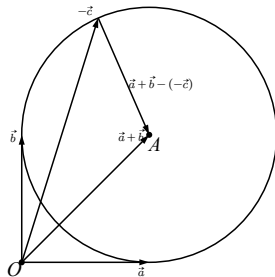
16. 4952

【解析】由题意可得 $a_n - a_{n-1} = n - 1$, 所以 $a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 2, \dots, a_n - a_{n-1} = n - 1$, 即 $a_n - a_1 = 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$, 故 $a_n = 2 + \frac{n(n-1)}{2}$,

所以 $a_{100} = 2 + 50 \times 99 = 4952$.

15. $\sqrt{2} + 1$

【解析】 $|c + a + b| = |a + b - (-c)|$, 如图所示, 向量 $-c$ 的终点在以 A 点为圆心 1 为半径的圆上, 所以 $|-c|$ 的最大值为 $\sqrt{2} + 1$, 即 $|c|$ 的最大值为 $\sqrt{2} + 1$.



16. $0 < a < \frac{1}{e}$

【解析】函数 $f(x) = e^x + a^x \log_a e - 2x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $(0, +\infty)$ 有一个极值点,

则 $f'(x) = e^x + a^x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 有一个变号零点,

(1) 当 $a > 1$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) > f'(0) = 0$, 不符合题意, 舍去.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, 由 $f''(x) = e^x + a^x \ln a = 0$, 解得 $x_0 = \log_{\frac{1}{a}}(\ln \frac{1}{a})$,

① 当 $\log_{\frac{1}{a}} \ln \frac{1}{a} \leq 0$, 即 $\frac{1}{e} \leq a < 1$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) > f'(0) = 0$, 舍去;

② 当 $\log_{\frac{1}{a}} \ln \frac{1}{a} > 0$ 时, 即 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增, 因为 $f'(0) = 0$, 所以 $f'(x_0) < 0$, 又因为 $f'(1) = a + e - 2 > 0$, 所以 $f'(x) = e^x + a^x - 2$ 在 $(x_0, 1)$ 内存在唯一一个零点, 即在 $(0, +\infty)$ 有一个零点;

综上可得, 实数 a 的取值范围为 $0 < a < \frac{1}{e}$.

三、解答题. 本题共 7 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) $A = \frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

解. (1) 选①: 由正弦定理可得, $\sin B = \frac{b}{2R} = b, \sin C = \frac{c}{2R} = c$ 1 分

所以 $b^2 + c^2 = a^2 + bc$

即 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ 2 分

由余弦定理, 可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$ 3 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$;4 分

选②: 因为 $S = \frac{1}{2}bc\sin A, b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A$ 1 分

所以 $2bc\sin A = 2\sqrt{3}bc\cos A$ 2 分

即 $\sin A = \sqrt{3}\cos A, \tan A = \sqrt{3}$ 3 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$;4 分

选③: 由正弦定理可得, $2\sin B\cos A = \sin A\cos C + \sin C\cos A$ 1 分

$2\sin B\cos A = \sin B$ 2 分

解得 $\cos A = \frac{1}{2}$ 3 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$;4 分

(2) 由正弦定理可知, $a = 2R\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 5 分

由余弦定理可得, $b^2 + c^2 - \frac{3}{4} = bc$ 6 分

即 $(b+c)^2 - \frac{3}{4} = 3bc$

因为 $bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ 7 分

所以 $(b+c)^2 - \frac{3}{4} \leq 3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

解得 $b+c \leq \sqrt{3}$, 当且仅当 $b=c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立9 分

故 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$10 分

18. 解 (1) 取 BC 的中点 O , 连接 OP, OE ,

设 $BD = 2a (a > 0)$, 在 $Rt\triangle BCD$ 中, 因为 $\angle CBD = 90^\circ, \angle BCD = 30^\circ$

所以 $BC = 2\sqrt{3}a$,

又 PO 为 $Rt\triangle PBC$ 斜边 BC 上的中线,
所以 $OP = \sqrt{3}a$,1 分

又 E 为 CD 的中点,
所以 $OE = a$,
因为 $OE \parallel BD$,
所以 $OE \perp BC$,2 分

由 $PE = BD$, 则 $PE = 2a$
因为 $OP^2 + OE^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (a)^2 = 4a^2 = PE^2$
所以 $OP \perp OE$ 3 分

又 $OP \perp BC, BC \cap OE = O$
所以 $OP \perp$ 平面 BCD 4 分

又 $OP \subset$ 平面 PBC
所以, 平面 $PBC \perp$ 平面 BCD ;5 分

(2) 由 (1) 可知 $OP \perp OE, OP \perp BC, OE \perp BC$, 分别以 OE, OC, OP 为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系

则 $B(0, -\sqrt{3}a, 0), C(0, \sqrt{3}a, 0), P(0, 0, \sqrt{3}a), D(2a, -\sqrt{3}a, 0)$ 6 分

$\overrightarrow{BP} = (0, \sqrt{3}a, \sqrt{3}a), \overrightarrow{DP} = (-2a, \sqrt{3}a, \sqrt{3}a), \overrightarrow{CD} = (2a, -2\sqrt{3}a, 0)$ 7 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -2ax + \sqrt{3}ay + \sqrt{3}az = 0 \\ 2ax - 2\sqrt{3}ay = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ z = y \end{cases}$, 不妨取 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 1, 1)$ 9 分

所以 $\vec{m} \cdot \overrightarrow{BP} = 2\sqrt{3}a$

又 $|\vec{m}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{6}a$,

$$\text{则 } \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{BP} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{BP}|}{|\vec{m}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{\sqrt{10}}{5} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以, 直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$12 分

19. 【答案】(1) 设 A_1 = “上学时选择 A 路线”, B_1 = “上学时选择 B 路线”, A_2 = “放学时选择 A 路线”, 则 $\Omega = A_1 \cup B_1$, 且 A_1 与 B_1 互斥.

根据题意得

$$P(A_1) = P(B_1) = 0.5 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$P(A_2|A_1) = 0.6, P(A_2|B_1) = 0.8 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

由全概率公式, 得

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$$

所以小明放学时选择 A 路线的概率为 0.7;7 分

$$(2) P(B_1|A_2) = \frac{P(A_2B_1)}{P(A_2)} = \frac{P(B_1)P(A_2|B_1)}{P(A_2)} = \frac{0.5 \times 0.8}{0.7} = \frac{4}{7}$$

所以已知小明放学时选择 A 路线, 上学选择 B 路线的概率为 $\frac{4}{7}$12 分

20. 解: (1) 当 $n = 1$ 时, 有 $2\sqrt{a_1} = a_1 + 1$, 得 $a_1 = 1$,1 分

由 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$, 有 $4S_n = (a_n + 1)^2$, ①

$$4S_{n-1} = (a_{n-1} + 1)^2 (n \geq 2), \textcircled{2} \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得, } 4(S_n - S_{n-1}) = (a_n + 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2$$

$$4a_n = (a_n + 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2, \text{化简 } (a_n + a_{n-1}) \cdot (a_n - a_{n-1} - 2) = 0 \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } a_n > 0, \text{ 所以 } a_n - a_{n-1} = 2 (n \geq 2) \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列

$$\text{即 } a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1; \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{4S_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \left(1 + \frac{1}{4n^2-1}\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right), \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{带入 } T_n \leq \frac{\lambda \cdot (n+1)2^n}{a_{n+1}S_n}, \text{ 可得 } \lambda \geq \frac{n^3}{2^{n-1}}, \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } b_n = \frac{n^3}{2^{n-1}}, \text{ 由 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \geq 1, \text{ 即 } 1 + \frac{1}{n} \geq 2^{\frac{1}{3}} = 1.26, \text{ 则 } n \leq 3 \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } b_1 = b_2 < b_3 < b_4, b_4 > b_5 > b_6 > \dots\dots$$

$$\text{故当 } n = 4 \text{ 时, } b_n \text{ 的最大值为 } b_4 = 8$$

$$\text{所以 } \lambda \geq 8. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{ 解 (1) 由题意可得, } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a^2 = 8, b^2 = 2, \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以, } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ 设 } B(x_0, y_0), \text{ 因为 } \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = (2\lambda + \mu x_0, \lambda + \mu y_0)$$

$$\text{所以 } P \text{ 的坐标为 } (2\lambda + \mu x_0, \lambda + \mu y_0), \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

又因为点 P 在椭圆 C 上

$$\text{所以 } \frac{(2\lambda + \mu x_0)^2}{8} + \frac{(\lambda + \mu y_0)^2}{2} = 1,$$

$$\text{化简可得 } \lambda^2 + \mu^2 \left(\frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{2}\right) + \frac{\lambda \mu x_0}{2} + \lambda \mu y_0 = 1, \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{2} = 1 \text{ 且 } \lambda^2 + \mu^2 = 1,$$

$$\text{所以 } \frac{\lambda \mu x_0}{2} + \lambda \mu y_0 = 0, \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为 B, P 为 C 上不与 A 重合的两点,

$$\text{所以, } \lambda \mu \neq 0, y_0 = -\frac{1}{2}x_0$$

$$\text{即直线 } OB \text{ 的斜率 } k = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\textcircled{2} \text{ 设 } l \text{ 的方程为 } y = -\frac{x}{2} + m (m \neq 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$$

$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{x}{2} + m \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{消去 } y$$

$$\text{可得 } x^2 - 2mx + 2m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 4m^2 - 4(2m^2 - 4) > 0, \text{ 可得 } -2 < m < 2, \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = 2m^2 - 4 \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$|MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{5(4 - m^2)}$$

$$A \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m - 2|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2(2 - m)}{\sqrt{5}}$$

$$\text{所以 } \triangle AMN \text{ 面积为 } S = \frac{1}{2} |MN| \cdot d = \sqrt{(4 - m^2)(2 - m)^2} = \sqrt{(2 + m)(2 - m)^3} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } f(m) = (2 + m)(2 - m)^3, (-2 < m < 2, m \neq 0)$$

$$f'(m) = -4(2 - m)^2(m + 1), \text{ 令 } f'(m) = 0, \text{ 解得 } m = -1$$

因为 $f(m)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0), (0, 2)$ 上单调递减,

所以, $f(m)$ 的最大值为 $f(-1) = 27$,

故 $\triangle AMN$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}

$$22. \text{ 解 (1) 当 } a = 1 \text{ 时, } f(x) = x \ln x - x, f'(x) = \ln x \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f'(x) < 0;$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } f'(x) > 0; \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增; \dots\dots\dots 3 \text{ 分}

$$(2) f'(x) = ax^{a-1} \ln x + x^{a-1} - 1, f'(1) = 0 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = f'(x) = ax^{a-1} \ln x + x^{a-1} - 1, g'(x) = a(a-1)x^{a-2} \ln x + (2a-1)x^{a-2}$$

$$g'(1) = 2a - 1$$

① 当 $2a - 1 > 0$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 因为 $g'(1) > 0$, 所以存在 $\delta > 1$, 使得当 $x \in (1, \delta)$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1, \delta)$ 上单调递增, 即 $f'(x)$ 在 $(1, \delta)$ 上单调递增, 因为 $f'(1) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, \delta)$ 上单调递增, 则 $f(x) > f(1) = -1$ 与 $f(x) \leq -1$ 矛盾, 故舍去 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

② 当 $2a - 1 \leq 0$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 此时 $f(x) = x^a \ln x - x \leq \sqrt{x} \ln x - x$

下面证明 $\sqrt{x} \ln x - x \leq -1$ 恒成立即可, 即证 $\ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 0$ \dots\dots\dots 6 \text{ 分}

$$\text{令 } F(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}, F'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \leq 0 \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

所以 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $F(x) \leq F(1) = 0$

$$\text{所以 } 2\ln x - x + \frac{1}{x} \leq 0, \text{ 即 } \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 0$$

综上所述, a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}

(3) 由 (2) 知当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 当 $x \geq 1$ 时, $\sqrt{x} \ln x - x \leq -1$

$$\text{即 } 2\ln x - x + \frac{1}{x} \leq 0, \text{ 令 } x = \frac{n+1}{n}, \text{ 则 } 2\ln \frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1} < 0 \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{化简可得, } 2\ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$\text{所以 } 2\left(\ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n}\right) < \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

即 $2\ln(n+1) < 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n+1}$
 所以 $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{n}{2(n+1)}$12 分

