第三届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

1. 已知$\odot O$为锐角$\triangle ABC$的外接圆，$\odot O_1$与$\odot O$内切于点A，且与边BC切于点D. 设$\triangle ABC$的内心为I，$\triangle IBC$的外接圆$\odot O_2$与$\odot O_1$交于点E、F. 证明：O_1、E、O_2、F四点共圆.

2. 已知a、b、$c>0$. 证明：

$$\left(a^3+\frac{1}{b^3}-1\right)\left(b^3+\frac{1}{c^3}-1\right)\left(c^3+\frac{1}{a^3}-1\right)\leqslant\left(abc+\frac{1}{abc}-1\right)^3.$$

3. 求最小的素数p，满足$(p,N)=1$，其中，N为所有满足以下条件的$(a_0,a_1,\cdots,a_{2\,012})$的个数：

(1)$(a_0,a_1,\cdots,a_{2\,012})$为$0,1,\cdots,2\,012$的一个排列；

(2)对$2\,013$的任意一个正约数m及所有的$n(0\leqslant n<n+m\leqslant 2\,012)$有$m\mid(a_{n+m}-a_n)$.

4. 已知$\{1,2,\cdots,n\}$的子集X满足：任给a、$b\in X$，若$\frac{a+b}{2}\in\mathbf{Z}$，则$\frac{a+b}{2}\in X$，故称$X$是“好子集”. 记$A(n)$为$\{1,2,\cdots,n\}$的好子集的个数(如$A(3)=7$，$\{1,2,3\}$的八个子集中只有$\{1,3\}$不是好子集). 证明：$A(100)+A(98)\geqslant 2A(99)+6$.

5. 已知两个半径不等的$\odot O$、$\odot O'$外离，$\odot O$、$\odot O'$的一条内公切线l与两条外公切线l_1、l_2分别交于点B、C，过B且与$\odot O$、$\odot O'$均外切的$\odot O_1$与l_1的第二个交点为P，过C且与$\odot O$、$\odot O'$均外切的$\odot O_2$与l_2的第二个交点为Q. 证明：B、P、C、Q四点共圆.

6. 已知a、b、$c>1$，且$a+b+c=9$. 证明：$\sqrt{ab+bc+ca}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

7. 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$，$x_{n+1}=4x_n+[\sqrt{11}x_n]$. 求$x_{2\,012}$的个位数字.

8. (50分)对$1,2,\cdots,n(n\in\mathbf{N}_+,n>2\,012)$的任意一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，定义：

$$L=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\sqrt{3}x_{i+1}|\,(x_{n+1}=x_1).$$

试求$L_{\max}$、$L_{\min}$及取得最大值时的所有排列$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的个数.

——答案请参考《中等数学》2012年第10期