

## 七校联合体 2021 届高三第三次联考试卷 (5 月)

# 数 学

命题学校：宝安中学（集团）

命题人：石超

审题人：许世清

注意事项：

1. 答题前，考生请务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $(2+i)i$  的虚部是 ( )

- A.  $2i$                       B.  $-i$                       C.  $2$                       D.  $-1$

2. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$ ,  $B = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

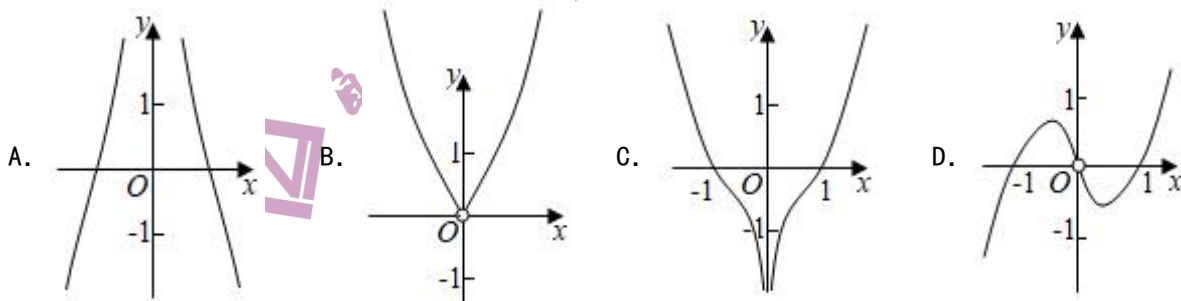
- A.  $\{0, 1\}$                       B.  $\{(0, 0), (1, 2)\}$                       C.  $\emptyset$                       D.  $[1, +\infty)$

3. 某小区有 1000 户居民，各户每月的用电量近似服从正态分布  $N(300, 100)$ ，则用电量在 320 度以上的居民户数估计约为 ( ) 参考数据：若随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，则

$$P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827, \quad P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545, \quad P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973.$$

- A. 17                      B. 23                      C. 34                      D. 46

4. 已知函数  $f(x) = (2^x + 2^{-x}) \ln|x|$  的图象大致为 ( )



5. 设  $a > 0, b > 0$ . 若  $\sqrt{3}$  是  $3^a$  与  $3^b$  的等比中项，则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值 ( )

- A.  $\frac{1}{4}$                       B. 8                      C. 2                      D. 4

6. 中医是中国传统文化的瑰宝. 中医方剂不是药物的任意组合, 而是根据中药配伍原则, 总结临床经验, 用若干药物配制组成的药方, 以达到取长补短、辨证论治的目的. 中医传统名方“八珍汤”是由补气名方“四君子汤”(由人参、白术、茯苓、炙甘草四味药组成)和补血名方“四物汤”(由熟地黄、白芍、当归、川芎四味药组成)两个方共八味药组合而成的主治气血两虚证方剂. 现从“八珍汤”的八味药中任取四味, 取到的四味药刚好组成“四君子汤”或“四物汤”的概率是( )

- A.  $\frac{1}{35}$                       B.  $\frac{1}{70}$                       C.  $\frac{1}{840}$                       D.  $\frac{1}{1680}$

7. 平行四边形  $ABCD$  中,  $AB=4, AD=2, \overline{AB} \cdot \overline{AD}=4$ , 点  $P$  在边  $CD$  上(含端点), 则  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  的取值范围是( )

- A.  $[-1, 8]$                       B.  $[-1, +\infty)$                       C.  $[0, 8]$                       D.  $[-1, 0]$

8. 设  $f(x)$  是定义在  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上的奇函数, 其导函数为  $f'(x)$ , 当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,

$f'(x) - f(x) \frac{\cos x}{\sin x} < 0$ , 则不等式  $f(x) < \frac{2\sqrt{3}}{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x$  的解集为( )

- A.  $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$                       B.  $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$   
C.  $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$                       D.  $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

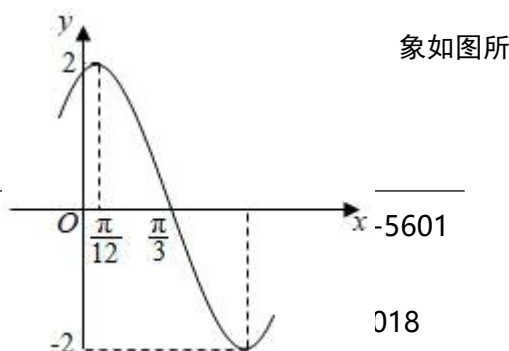
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知  $m, n$  是两条不重合的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个两两不重合的平面, 则下列命题正确的是( )

- A. 若  $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \parallel \beta$ , 则  $m \parallel n$                       B. 若  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
C. 若  $m \parallel \beta, n \parallel \beta, m, n \subset \alpha$ , 则  $\alpha \parallel \beta$                       D. 若  $n \subset \alpha, n \perp \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$

10. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图

示, 下列说法正确的是( )



- A. 函数  $y = f(x)$  的图象关于点  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$  对称
- B. 函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{5\pi}{12}$  对称
- C. 函数  $y = f(x)$  在  $[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$  单调递减
- D. 该图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位可得  $y = 2\sin 2x$  的图象

11. 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 且  $|F_1F_2| = \frac{2b^2}{a}$ , 点  $P$  为双曲线右支一点,  $I$  为  $\triangle PF_1F_2$  的内心, 若  $S_{\triangle IPF_1} = S_{\triangle IPF_2} + IS_{\triangle F_1F_2}$  成立, 则下列结论正确的有 ( )

- A. 当  $PF_2 \perp x$  轴时,  $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$
- B. 离心率  $e = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- C.  $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- D. 点  $I$  的横坐标为定值  $a$

12. 已知曲线  $C_n: x^2 - 2nx + y^2 = 0 (n=1, 2, \dots)$ . 从点  $P(-1, 0)$  向曲线  $C_n$  引斜率为  $k_n (k_n > 0)$  的切线  $l_n$ , 切点为  $P_n(x_n, y_n)$ . 则下列结论正确的是 ( )

- A. 数列  $\{x_n\}$  的通项为  $x_n = \frac{n}{n+1}$
- B. 数列  $\{y_n\}$  的通项为  $y_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$
- C. 当  $n > 3$  时,  $x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdots x_{2n-1} > \frac{1-x_n}{1+x_n}$
- D.  $\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} < \sqrt{2} \sin \frac{x_n}{y_n}$

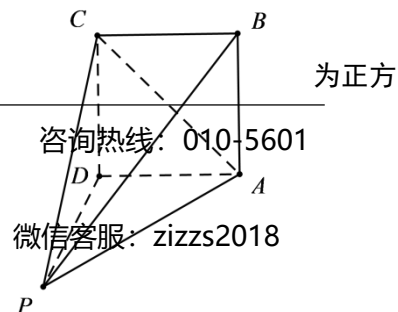
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知  $(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_7x^7$ , 则  $a_1 + a_2 + \dots + a_7 =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知点  $P, Q$  分别是圆  $C: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$  及直线  $l: 3x-4y=0$  上的动点,  $O$  是坐标原点, 则  $|\overline{OP} - \overline{OQ}|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 一条形“标语”挂在墙上, 把“标语”看作线段  $AB$ , 射线  $AB$  与地面交点为  $D$ , 且  $AB$  与地面垂直,  $AD = 17$  米,  $BD = 10$  米, 某人直立看“标语” $AB$ , 眼睛  $C$  距离地面 1 米, 当  $\angle ACB$  最大时, 此人的脚到  $D$  点的距离为 \_\_\_\_\_ 米.

16. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp AC$ ,  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 底面  $ABCD$



形, 且  $CD + PD = 3$ . 若四棱锥  $P - ABCD$  的每个顶点都在球  $O$  的球面上, 则当  $CD=1$  时, 球  $O$  的表面积为 \_\_\_\_\_; 当四棱锥  $P - ABCD$  的体积取得最大值时, 二面角  $A - PC - D$  的正切值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 ①  $a \sin(A+C) = b \cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$ ; ②  $1 + 2 \cos C \cos B = \cos(C-B) - \cos(C+B)$ ;

③  $\frac{2 \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{b}{c}$ , 从这三个条件中任选一个, 补充到下面的横线上并作答.

问题: 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $b+c=2\sqrt{3}, a=\sqrt{6}$ , \_\_\_\_\_.

求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (12 分) 数字人民币, 是中国人民银行尚未发行的法定数字货币, 即“数字货币电子支付”. 央行数字货币不计付利息, 可用于小额、零售、高频的业务场景, 相比于纸币没有任何差别. 数字人民币试点地区是深圳、苏州、雄安新区、成都及未来的冬奥场景, 为了解居民对数字人民币的了解程度, 某社区居委会随机抽取 1200 名社区居民参与问卷测试, 并将问卷得分绘制频率分布表如下:

得分	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
男性人数	30	110	110	150	130	80	40
女性人数	20	60	70	180	140	50	30

(1) 将居民对数字人民币的了解程度分为“比较了解”(得分不低于 60 分)和“不太了解”(得分低于 60 分)两类, 完成  $2 \times 2$  列联表, 并判断是否有 99% 的把握认为“数字人民币的了解程度”与“性别”有关?

	不太了解	比较了解	总计
男性			
女性			
总计			

(2) 从参与问卷测试且得分不低于 80 分的居民中, 按照性别进行分层抽样, 共抽取 10 人, 连同  $n$  ( $n \in N^*$ ) 名男性调查员一起组成 3 个环保宣传队. 若从这  $n+10$  中随机抽取 3 人作为队长, 且男性队长人数占的期望不小于 2, 求  $n$  的最小值.

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$$

临界值表：

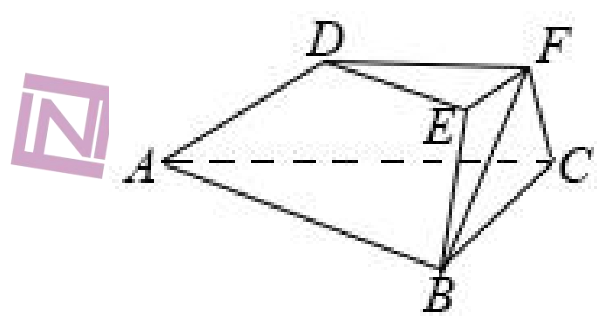
$P(K^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
$k_0$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (12分) 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2, a_2 = 3$ , 其前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_{n+1} + S_{n-1} = 2S_n + 1 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $b_n = 4^n + (-1)^{n-1} \lambda \cdot 2^{a_n} (\lambda$  为非零整数,  $n \in \mathbf{N}^*)$ , 试确定  $\lambda$  的值, 使得对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $b_{n+1} > b_n$  成立.

20. (12分) 如图, 在三棱台  $ABC-DEF$  中, 平面  $BCFE \perp$  平面  $ABC, \angle ACB = 90^\circ, BE = EF = FC = 1, BC = 2, AC = 3$ .

- (1) 求证:  $BF \perp$  平面  $ACFD$ ;
- (2) 求二面角  $B-AD-F$  的平面角的余弦值.



21. (12分) 已知函数  $f(x) = \ln x - ax$
- (1) 若函数  $f(x)$  在定义域上的最大值为 1, 求实数  $a$  的值;
  - (2) 设函数  $h(x) = (x-2)e^x + f(x)$ , 当  $a = 1$  时,  $h(x) \leq b$  对任意的  $x \in (\frac{1}{2}, 1)$  恒成立, 求满足条件的实数  $b$  的最小整数值.

22. (12分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左顶点为  $A(-2, 0)$ , 两个焦点与短轴一个顶点构成

等腰直角三角形, 过点  $P(1, 0)$  且与  $x$  轴不重合的直线  $l$  与椭圆交于  $M, N$  不同的两点.

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 当  $AM$  与  $MN$  垂直时, 求  $AM$  的长;

(III) 若过点  $P$  且平行于  $AM$  的直线交直线  $x = \frac{5}{2}$  于点  $Q$ , 求证: 直线  $NQ$  恒过定点.





## 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线