第十三次适应性训练文科数学答案

一．选择题：本题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	D	D	C	D	A	B	C	C	B

二．填空题：本题共 4 小题，每题 5 分共 20 分.

13. -8　　14. $-\dfrac{31}{2}$　　15. $(40+30\sqrt{3})\pi$　　16. $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

三．**解答题：共 70 分，其中 17—21 题每题 12 分，第 22、23 题，每题 10 分.**

17.解（1）在 ΔABC 中，由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$.又 $\dfrac{\sqrt{3}a}{1+\cos A}=\dfrac{c}{\sin C}$

所以，$\dfrac{\sqrt{3}a}{1+\cos A}=\dfrac{a}{\sin A}$.所以，$\sqrt{3}\sin A=1+\cos A$，即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

即 $\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由（1）及题意知 ΔABC 中，$a=\sqrt{3},c-b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},A=\dfrac{\pi}{3}$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $3=(c-b)^2+bc$.所以 $bc=1+\sqrt{3}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

18.（1）证明：因为 $AC_1\perp A_1C$，$AC_1\perp BD$，$A_1C\cap BD=D$，$A_1C,BD\subset$ 面 A_1BC.

所以，$AC_1\perp$ 面 A_1BC.又 $BC\subset$ 面 A_1BC，所以 $AC_1\perp BC$，又 $\angle ACB=90^\circ$ 即 $BC\perp AC$

而 $AC\cap A_1C=A,\ AC,A_1C\subset$ 面 ACC_1A_1，所以 $BC\perp$ 面 ACC_1A_1.又因为 $BC\subset$ 面 ABC

所以，面 $ACC_1A_1\perp$ 面 ABC.

（2）$BC\perp$ 面 ACC_1A_1 且 $BC\parallel B_1C_1$，则 $B_1C_1\perp$ 面 ACC_1A_1，则 $B_1C_1\perp A_1C_1$，则 $B_1D=\sqrt{3}$

由 $AC_1\perp$ 面 A_1BC 且 $BC\parallel B_1C_1$ 得 B_1 到面 A_1BC 的距离 h=$C_1D=\sqrt{2}$，

所以 B_1D 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为 $\dfrac{h}{B_1D}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

19.（1）设样本容量为 n,则 $\frac{60}{n}=(0.028+0.032)\times 10$，得 n=100，样本容量为 100.

设本次竞赛成绩的中位数为 x,则 $0.08+0.2+(x-70)\times 0.032=0.5$，得 x=76.875

抽取的学生竞赛成绩的平均数 $\overline{x}=55\times 0.08+65\times 0.2+75\times 0.32+85\times 0.28+95\times 0.12=76.6$.

(2) $\overline{x}-\sigma=76.6-11=65.6, \overline{x}+\sigma=76.6+11=87.6$，则抽取学生在 $\left(\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma\right)$ 内的频率为

$(70-65.6)\times 0.02+0.32+(87.6-80)\times 0.028=0.6208$

全校学生有 1000 人，竞赛成绩在 $\left(\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma\right)$ 内的人数 $1000\times 0.6208=620.8\approx 621$

20. 解（1）因为 $P(1,1)$ 在 C 的渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，所以 $a=b$，

因为 $A(a,0)$，所以 ΔPAO 的面积为 $\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}$，解得 $a=1$，所以 $b=1$，

所以 C 的方程为 $x^2-y^2=1$.

（2）当直线 l 的斜率不存在时，不符合题意，舍去.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-1), M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y-1=k(x-1) \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$，得 $(1-k^2)x^2-2k(1-k)x-k^2+2k-2=0$.

由 $\begin{cases} 1-k^2\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$，得 $k<1$ 且 $k\neq -1$. 则 $x_1+x_2=\frac{2k}{1+k}$， $x_1x_2=\frac{k^2-2k+2}{k^2-1}$.

直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，令 $x=x_2$，得 $G(x_2, \frac{y_1(x_2-1)}{x_1-1})$.

因为 H 为 NG 的中点，所以 $H(x_2, \frac{\frac{y_1(x_2-1)}{x_1-1}+y_2}{2})$.

所以 $k_{AH}=\frac{\frac{\frac{y_1(x_2-1)}{x_1-1}+y_2}{2}}{x_2-1}=\frac{1}{2}(\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1})$

因为 $\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}=\frac{k(x_1-1)+1}{x_1-1}+\frac{k(x_2-1)+1}{x_2-1}=2k+\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}$.

又 $\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}=\dfrac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\dfrac{\dfrac{2k}{1+k}-2}{\dfrac{k^2-2k+2}{k^2-1}-\dfrac{2k}{k+1}+1}=2-2k$

所以 $k_{AH}=1$, 即直线 AH 的斜率为定值.

21. （1）由题设知 $f'(x)=e^x(1+\dfrac{a}{x}+a\ln x),\ (x>0)$

$g(x)=e^{-x}f'(x)=1+\dfrac{a}{x}+a\ln x$，$g'(x)=\dfrac{a(x-1)}{x^2}\ (x>0)$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0,\ g(x)$ 为减函数；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0,\ g(x)$ 为增函数.

故 $g(x)_{\min}=g(1)=1+a$，由于 $g(x)\geq 2$ 恒成立，故 $1+a\geq 2$，故 $a\geq 1$.

（注：也可分离参数）

（2）设 $h(x)=f'(x)=e^x(1+\dfrac{a}{x}+a\ln x)$ ，则 $h'(x)=e^x(1+\dfrac{2a}{x}-\dfrac{a}{x^2}+a\ln x)$

设 $H(x)=1+\dfrac{2a}{x}-\dfrac{a}{x^2}+a\ln x$，$H'(x)=\dfrac{a(x^2-2x+2)}{x^3}>0$，故 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\because a>2,\ \therefore H(1)=a+1>0,\ H(\dfrac{1}{2})=1-a\ln 2<0$，故存在 $x_2\in(\dfrac{1}{2},1)$，使得 $H(x_2)=0$

则 $h(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增.

故 x_2 是 $h(x)$ 的极小值点，所以 $x_2=x_1$.

由（1）知，当 $a=1$ 时，$\ln x+\dfrac{1}{x}\geq 1$（当 $x=1$ 时取等），故 $h(x)>h(x_1)=e^{x_1}(1+\dfrac{a}{x_1}+a\ln x_1)>e^{x_1}(1+a)>0$，

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

由 $H(x_1)=0$，即 $1+\dfrac{2a}{x_1}-\dfrac{a}{x_1^2}+a\ln x_1=0$，即 $1+a\ln x_1=\dfrac{a}{x_1^2}-\dfrac{2a}{x_1}$.

故 $f(x_1)=e^{x_1}(1+a\ln x_1)=ae^{x_1}\dfrac{1-2x_1}{x_1^2}<0=f(x_0)$. 又由（1）可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $x_0>x_1$

22. 解（1）$\because C:\rho=4a\cos\theta\ (a>0),\quad \therefore \rho^2=4\rho a\cos\theta$. 由 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ 得：

$(x-2a)^2+y^2=4a^2$，所以，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2a+2a\cos\alpha\\ y=2a\sin\alpha\end{cases}$ ，（α 为参数）.

消参得直线 l 的普通方程为：$x+y-2=0$.

（2）由（1）知曲线C的直角坐标方程为：$(x-2a)^2+y^2=4a^2$，其轨迹为圆，易知圆心到直线l的距离

小于半径$2a$，即$\dfrac{|2a-2|}{\sqrt{2}}<2a$，得$a>\sqrt{2}-1$.

因为弦MN的长为$2\sqrt{4a^2-(\dfrac{2a-2}{\sqrt{2}})^2}=2\sqrt{2}\sqrt{a^2+2a-1}$，原点$O$在直线$MN$的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

所以$S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}|MN|d=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\sqrt{a^2+2a-1}\times\sqrt{2}=2\sqrt{a^2+2a-1}$

又$S_{\Delta OMN}=2\sqrt{7}$，所以$2\sqrt{a^2+2a-1}=2\sqrt{7}$，得$a=2$或$a=-4$（舍去）. 所以实数$a$的值为2

23. 解（1）由题意得

$$f(x)=\begin{cases}3x, & x\geq 2\\ -x+8, & -4<x<2\\ -3x, & x\leq -4\end{cases},$$

所以$f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增.

因此$f(x)$的最小值$m=f(2)=6$

（2）由（1）知$a+b+c=6$

所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+a\sqrt{ac}$

由基本不等式$2\sqrt{ab}\leq a+b,\quad 2\sqrt{bc}\leq b+c,\quad 2\sqrt{ac}\leq a+c$

所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\leq 3(a+b+c)=18$，当且仅当$a=b=c$时等号成立，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq 3\sqrt{2}$.