1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题要求的.

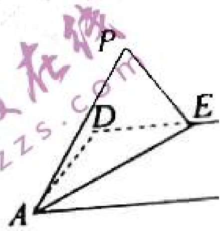
1.已知实数a满足$\frac{3-ai}{1+i}=2-i$（i为虚数单位），设复数$z=(a+1)+(a-1)i$，则下列结论错误的是（　　）

A. z为纯虚数　　B. $|z|=2$　　C. z的虚部小于0　　D. $z+\bar{z}>0$

2.设全集$U=\{x\in N^*|1\leqslant x\leqslant 6\}$，集合$A=\{1,2,3,5\}$，则满足$A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$的集合$B$共有

A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 5个

3.如图，在矩形$ABCD$中，点E为CD边上一动点(不包括端点)，将$\triangle ADE$沿AE翻折成$\triangle PAE$，使$PAE\perp$平面$ABCE$. 给出下列两个结论：



①在平面$ABCE$内过点C有且只有一条直线与平面PAE平行；

②在CD边上存在点E使得$PE\perp AB$. 则下列判断正确的是（　　）

A. ①正确，②错误　　B. ①错误，②正确

C. ①，②都正确　　D. ①，②都错误

4.宋代著名类书《太平御览》记载：“伏羲坐于方坛之上，听八风之气，乃画八卦.”乾为天，坤为地，坎为水，艮为山，巽为风，离为火，兑为泽，象征八种自然现象，以类万物之情.如图所示为太极八卦图，八卦分据八方，中绘太极，古代常用此图作为除凶避灾的吉祥图案.八卦中的每一卦均由纵向排列的三个爻组成，其中“—”为阳爻，“- -”为阴爻. 现从八卦中任取两卦，已知取出的两卦中有一卦恰有一个阳爻，则另一卦至少有两个阳爻的概率为（　　）

5.若椭圆上存在点 P，使得点 P 到椭圆的两个焦点的距离之比为 2∶1，则称该椭圆为“倍径椭圆”，则下列椭圆中为“倍径椭圆”的是 (　　)

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$　　B. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{10}=1$　　C. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$　　D. $\frac{x^2}{33}+\frac{y^2}{36}=1$

6.函数 $f(x)=\frac{4^{x+2}+1}{2^x}$ 的图象关于 (　　)

A.点 $(-2，0)$ 对称　　B.直线 $x=-2$ 对称　　C.点 $(2，0)$ 对称　　D.直线 $x=2$ 对称

7.在钝角 $\triangle ABC$ 中，角 $A，B，C$ 所对的边分别为 $a，b，c$，已知 $a>b>c$，且 $B=60°$，则 $\frac{a}{c}$ 的取值范围是 (　　)

A. $(\frac{1}{2}，+\infty)$　　B. $(1，+\infty)$　　C. $(\frac{3}{2}，+\infty)$　　D. $(2，+\infty)$

8.设 $(1+x)^6(1+ax)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，若 $a_2=-9$，则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$ 的值为 (　　)

A. 63　　B. 64　　C. 65　　D. -65

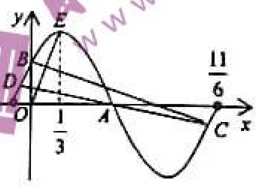
9.设点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ 在不等式组 $\begin{cases}x-y+1\geq 0\\ x+y-3\leq 0\\ y\geq 1\end{cases}$ 表示的平面区域内运动，则 $z=2(x_2-x_1)+y_2-y_1$ 的最大值为 (　　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

10.如图，函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0，0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 在一个周期内的图象(不包括端点)与 x 轴，y 轴的交点分别为 $A，B$，与过点 A 的直线另相交于 $C，D$ 两点，E 为图象的最高点，O 为坐标原点，则 $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{OE}=$ (　　)

A. $-\frac{4}{9}$　　B. $\frac{14}{9}$

C. $-\frac{2}{9}$　　D. $\frac{4}{9}$



11.已知点 $P(2，2)$，若圆 C：$(x-5)^2+(y-6)^2=r^2(r>0)$ 上存在两点 $A，B$，使得 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AB}$，则 r 的取值范围是 (　　)

A. $(0，5)$　　B. $(0，\frac{5}{2})$　　C. $[1，5)$　　D. $[\sqrt{5}，\frac{5}{2})$

12.已知互不相等的三个实数 $a，b，c$ 都大于 1，且满足 $\lg a\cdot\lg\frac{a}{c}=\lg c\cdot\lg\frac{a}{b}$，则 $a，b，c$ 的大小关系可能是 (　　)

A. $c<b<a$　　B. $b<c<a$　　C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

第2页(共4页)

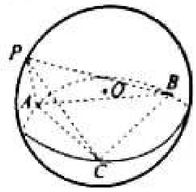
第Ⅱ卷

二、填空题：本题共4个小题，每小题5分，共20分.

13.已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=3$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为______.

14.已知 $\sin(\pi+\alpha)=2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$，则 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{3})$ 的值为______.

15.设直线 $y=kx$ 与双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 相交于 A，B 两点，P 为 C 上不同于 A，B 的一点，直线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，若 C 的离心率为2，则 $k_1\cdot k_2=$______.



16.如图，三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，$PA\perp PC$，$\triangle ABC$ 是边长为6的正三角形，二面角 $P-AC-B$ 大小为 $120°$，则球 O 的表面积等于______.

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答，第22，23题为选考题，考生根据要求作答.

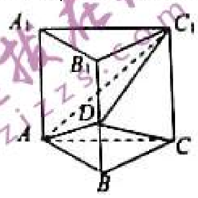
（一）必考题：共60分.

17.（12分）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知当 $n\geq2$ 时，$a_n-a_{n-1}=2$，且 $4a_3$ 为 S_4，S_5 的等比中项.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 的值；

（2）设 $b_n=\frac{a_{n+2}}{a_na_{n+1}\cdot2^n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底边长和侧棱长都为2，点 D 在棱 BB_1 上运动(不包括端点).



（1）若 D 为 BB_1 的中点，证明：$CD\perp AC_1$；

（2）设面 AC_1D 与面 ABC 所成的二面角大小为 θ（θ 为锐角），求 $\cos\theta$ 的取值范围.

19.（12分）今年五月，某医院健康管理中心为了调查成年人体内某种自身免疫力指标，从在本院体检的人群中随机抽取了100人，按其免疫力指标分成如下五组：$(10，20]$，$(20，30]$，$(30，40]$，$(40，50]$，$(50，60]$，其频率分布直方图如图1所示.今年十月，某医药研究所研发了一种疫苗，对提高该免疫力有显著效果.经临床检测，将自身免疫力指标比较低的成年人分为五组，各组分别按不同剂量注射疫苗后，其免疫力指标 y 与疫苗注射量 x 个单位具有相关关系，样本数据的散点图如图2所示.

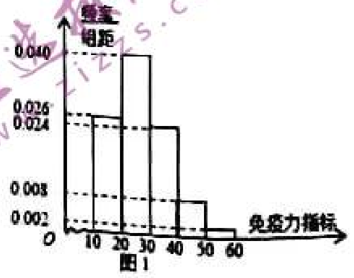


图1

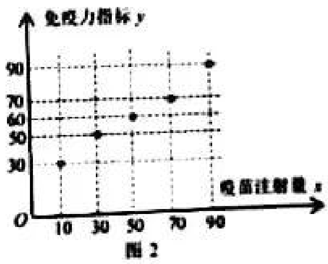


图2

健管中心从自身免疫力指标在(40，60]内的样本中随机抽取 3 人调查其饮食习惯，记 X 表示这 3 人中免疫力指标在(40，50]内的人数，求 X 的分布列和数学期望；

(2) 由于大剂量注射疫苗会对身体产生一定的副作用，医学部门设定：自身免疫力指标较低的成年人注射疫苗后，其免疫力指标不应超过普通成年人群自身免疫力指标平均值的 3 倍. 以健管中心抽取的 100 人作为普通人群的样本，据此估计，疫苗注射量不应超过多少个单位？

附：对于一组样本数据 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)，其回归直线 $\hat{y}=bx+a$ 的斜率和截距的最小二乘估计值分别为 $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$a=\bar{y}-b\bar{x}$.

20. (12 分) 设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线 C 上，O 为坐标原点，已知 $|OM|=2\sqrt{3}$，$|MF|=3$.

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 过焦点 F 作直线 l 交 C 于 A，B 两点，P 为 C 上异于 A，B 的任意一点，直线 PA，PB 分别与 C 的准线相交于 D，E 两点，证明：以线段 DE 为直径的圆经过 x 轴上的两个定点.

21. (12 分) 已知函数 $f(x)=x\ln x-\dfrac{a}{2}(x^2-1)$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 内是减函数，求 a 的取值范围；

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，若 $0<a<1$，求 $f(x)$ 的零点个数.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. (10 分) 选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\tan\alpha\\ y=\dfrac{\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\cos\alpha}\end{cases}$ (α 为参数，且 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$).

以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{4}{2-\cos^2\theta}$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 设曲线 C_1 与 C_2 相交于 A，B 两点，点 P 的直角坐标为 $(0，1)$，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的值.

23. (10 分) 选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-a|+2|x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)<8$ 的解集；

(2) 若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq 2a+1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2020-2021 学年全国 I 卷区优生联赛试卷
理科数学参考答案

一、选择题：

1.【答案】D

【考点范围】复数的有关概念和四则运算.

【思路点拨】先通过复数的乘法或除法运算，利用复数相等求出 a 的值，再写出复数 z 的代数式，然后根据有关概念判断正误.

【解析】由已知，$3-ai=(2-i)(1+i)=3+i$，则 $a=-1$，所以 $z=-2i$，$|z|=2$，z 的虚部是 -2.

因为 $\bar{z}=2i$，则 $z+\bar{z}=0$，选 D.

2.【答案】C

【考点范围】集合的有关概念与运算.

【思路点拨】确定集合 B 含有哪些元素，不含哪些元素，用子集概念列举所有集合 B.

【解析】由题设，$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$．据题意，$1, 2\in \complement_U B$，且 $3, 5\notin \complement_U B$，即 $1, 2\notin B$，且 $3, 5\in B$，则 $\{3,5\}\subseteq B\subseteq\{3,4,5,6\}$，所以集合 B 可以是 $\{3, 5\}$，$\{3, 4, 5\}$，$\{3, 5, 6\}$，

3.【答案】A

【考点范围】直线、平面平行，直线、平面垂直的判定和性质.

【思路点拨】①平面 $ABCE$ 内的直线 l 与平面 PAE 平行的充要条件是 $l\parallel AE$，据此可判断结论正确；②直接判断 PE 与 AB 能否垂直有困难，用反证法分析较方便.

【解析】①在 AB 上取点 F，使 $AF=EC$，则四边形 $AECF$ 为平行四边形，得 $CF\parallel AE$，从而 $CF\parallel$ 平面 PAE，结论正确；

②作 $PM\perp AE$，垂足为 M，因为平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$，则 $PM\perp$ 平面 $ABCE$，所以 $PM\perp AB$.
假设 $PE\perp AB$，则 $AB\perp$ 平面 PAE，从而 $AB\perp AE$，这与 $\angle BAE$ 为锐角矛盾，所以假设不成立，结论错误，选 A.

4.【答案】D

【考点范围】古典概型，条件概率，渗透数学文化.

【思路点拨】所求的概率为条件概率，用字母 A，B 表示相关事件，利用条件概率公式求解.

【解析】由八卦图可知，八卦中有 1 卦有三个阳爻，有 3 卦恰有一个阳爻，有 3 卦恰有两个阳爻，有 1 卦没有阳爻．设取出的两卦中“有一卦恰有一个阳爻”为事件 A，“另一卦至少有两个阳爻”为事件 B.

解法一：因为 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_5^2}{C_8^2}=\dfrac{9}{14}$，$P(AB)=\dfrac{C_3^1C_4^1}{C_8^2}=\dfrac{3}{7}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{2}{3}$，选 D.

解法二：因为 $n(A)=C_3^1C_5^1+C_3^2=18$，$n(AB)=C_3^1C_4^1=12$，所以 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$，选 D.

5.【答案】C

【考点范围】椭圆的定义，标准方程，椭圆的几何性质.

【思路点拨】利用椭圆定义及焦半径的范围，找出 a，c 所满足的关系，检验出符合要求的椭圆.

【解析】设点 P 到椭圆两个焦点的距离分别为 m 和 $2m$，则 $2m+m=2a$，即 $m=\dfrac{2a}{3}$.

因为 $m\geqslant a-c$，则 $\dfrac{2a}{3}\geqslant a-c$，即 $a\leqslant 3c$. 经检验，椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$ 满足要求，选 C.

6.【答案】B

【考点范围】指数的运算，函数的奇偶性，图象的平移变换.

【思路点拨】将 $f(x)$ 的解析式变形，找一个与 $f(x)$ 相关联的奇函数或偶函数，利用图象变换得出 $f(x)$ 的对称性.

【解析】$f(x)=\dfrac{2^{2x+4}+1}{2^x}=2^{x+4}+\dfrac{1}{2^x}=4(2^{x+2}+\dfrac{1}{2^{x+2}})$. 设 $g(x)=4(2^x+\dfrac{1}{2^x})$，则 $f(x)=g(x+2)$.

7.【答案】D

【考点范围】正弦定理，两角差的正弦函数公式，商数关系，正切函数的单调性.

【思路点拨】利用正弦定理，结合 $A+C=120°$，将目标变量表示成角 C 的三角函数，并确定其定义域，再求值域.

【解析】因为 $B=60°$，则 $A+C=120°$，所以 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin(120°-C)}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}\cos C+\sin C}{2\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\dfrac{1}{2}$.

因为 $a>b>c$，则 A 为钝角，从而 $C\in(0°，30°)$，得 $\tan C\in(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，所以 $\dfrac{a}{c}\in(2,+\infty)$，选 D.

8.【答案】A

【考点范围】二项式定理，二项展开式的系数性质.

【思路点拨】利用二项式定理求出 x^2 的系数，再求 a 的值，通过赋值法求展开式中各项的系数和，及常数项，再求其差.

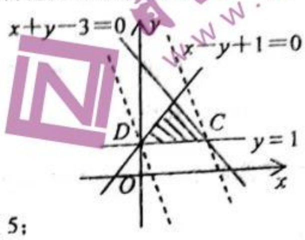
【解析】因为 $a_2=C_6^0C_4^2a^2+C_6^1C_4^1a+C_6^2C_4^0=6a^2+24a+15$，则 $6a^2+24a+15=-9$，即 $a^2+4a+4=0$，所以 $a=-2$. 在 $(1+x)^6(1-2x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$ 中，令 $x=0$，则 $a_0=1$.

令 $x=1$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^6=64$，所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=64-a_0=63$，选 A.

9.【答案】B

【考点范围】二元一次不等式组表示的平面区域，线性规划.

【思路点拨】将目标变量变形为 $z=2x_2+y_2-(2x_1+y_1)$，则问题转化为在约束条件下求 $2x+y$ 的极差，即 $2x+y$ 的最大值与最小值的差.



【解析】因为 $z=2(x_2-x_1)+y_2-y_1=2x_2+y_2-(2x_1+y_1)$，

设 $b=2x+y$，则 $z_{max}=b_{max}-b_{min}$. 作可行域，如图.

平移直线 l: $y=-2x+b$，当直线 l 过点 $C(2,1)$ 时，b 取最大值 5;

当直线 l 过点 $D(0,1)$ 时，b 取最小值 1，所以 z 的最大值为 $5-1=4$，

选 B.

10.【答案】A

【考点范围】复合型正弦函数的图象和性质，平面向量数量积的坐标运算.

【思路点拨】根据图象求出 $f(x)$ 的解析式，再求出 A，B，C 的坐标，利用图象的对称性得出 A 为线段 CD 的中点，将 $\overline{BC}+\overline{BD}$ 转化为 $2\overline{BA}$，再用数量积的坐标运算公式求解.

【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为T，由图知，$\frac{3}{4}T=\frac{11}{6}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$，则 $T=2$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$.

因为 $f(\frac{1}{3})=1$，则 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})$.

由题设，点 $A(\frac{5}{6},0)$，$B(0,\frac{1}{2})$，$E(\frac{1}{3},1)$，则 $\overline{BA}=(\frac{5}{6},-\frac{1}{2})$，$\overline{OE}=(\frac{1}{3},1)$. 因为 $f(x)$ 的图象关于点 A 对称，则 A 为线段 CD 的中点，所以 $(\overline{BC}+\overline{BD})\cdot\overline{OE}=2\overline{BA}\cdot\overline{OE}=2(\frac{5}{18}-\frac{1}{2})=-\frac{4}{9}$，选 A.

【命题意图】2020 年全国 I 卷中出现了以余弦函数图象为载体，考查三角函数有关性质的试题，本题取意如此，主考正弦函数的图象和性质，渗透平面向量，注重考查基础知识和基本技能，体现一定的综合性，题型新颖别致.

11.【答案】C

【考点范围】圆的标准方程，几何性质，直线与圆的位置关系，两点间的距离公式.

【思路点拨】根据 $\overline{PA}=2\overline{AB}$ 的几何意义，找出圆心 C 到直线 AB 的距离 d 与圆半径 r 之间的关系，利用直线 AB 与圆 C 相交，得出 $0\leqslant d<r$，再解不等式求 r 的取值范围.

【解析】取 AB 的中点 D，则 $CD\perp AB$. 因为 $\overline{PA}=2\overline{AB}$，则 $|PD|=5|AD|$，设 $|CD|=d$，则 $\sqrt{|PC|^2-d^2}=5\sqrt{r^2-d^2}$. 因为点 $P(2,2)$，$C(5,6)$，则 $|PC|^2=(5-2)^2+(6-2)^2=25$，

所以$\sqrt{25-d^2}=5\sqrt{r^2-d^2}$，得$d^2=\frac{25}{24}(r^2-1)$．因为$0\leqslant d<r$，则$0\leq\frac{25}{24}(r^2-1)<r^2$，解得$1\leqslant r<5$，选 C.

【命题意图】 2020 年全国 I 卷中突出了对直线与圆的位置关系的考查，注重分析与综合，强调转化思想，具有一定的思维难度．参照这一考向，本题用向量语言阐述直线与圆的位置关系，通过寻找相关变量的内在联系来分析和解决问题，体现出了一种新的解题策略.

12.**【答案】** B

【考点范围】 对数的运算性质，对数函数的性质，二次函数的图象和性质.

【思路点拨】 将已知等式变形为关于 lg$a$ 的一元二次方程，由方程有实根得出 b，c 的大小关系.

再构造一个二次函数$f(x)$，根据$f(\lg a)$，$f(\lg b)$，$f(\lg c)$的大小关系确定 lg$a$，lg$b$，lg$c$ 的大小关系.

【解析】 由已知，$\lg a(\lg a-\lg c)=\lg c(\lg a-\lg b)$，即$\lg^2 a-2\lg a\cdot\lg c+\lg b\cdot\lg c=0$．

则关于 x 的方程$x^2-2x\lg c+\lg c\cdot\lg b=0$有实根，所以$\Delta=4\lg^2 c-4\lg c\cdot\lg b=4\lg c(\lg c-\lg b)\geq 0$．

因为$b\neq c$，$b>1$，$c>1$，则 $\lg c>\lg b$，所以 $c>b$.

设$f(x)=x^2-2x\lg c+\lg c\cdot\lg b$，则二次函数$f(x)$的图象关于直线$x=\lg c$对称，且

$f(\lg b)=\lg^2 b-\lg b\cdot\lg c=\lg b(\lg b-\lg c)<0$．若$x=\lg a$是$f(x)$的一个较大零点，则$\lg b<\lg c<\lg a$，即$b<c<a$；若$x=\lg a$是$f(x)$的一个较小零点，则$\lg a<\lg b<\lg c$，即$a<b<c$，选 B.

【命题意图】 分析多元指对数不定方程中未知数的大小关系，在 2017 年，2020 年全国 I 卷中都有考查，以指（对）数运算、指（对）数函数性质为知识载体，重点考查运用方程与函数思想分析和解决问题的能力，以及数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养.本题以三元对数不定方程为基点，通过构造二次函数，分析三个未知数之间的可能大小关系，体现了一定的开放性和探索性，并达成上述考查目标．本题还可设计成多选题，与新高考接轨.

二、填空题：

13.**【答案】** 120°

【考点范围】 向量的模，夹角，数量积定义及运算性质.

【思路点拨】 利用数量积定义及运算性质，将已知条件转化为关于向量夹角的三角方程求解.

【解析】 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-4\cos\theta$.

由已知，$1-4\cos\theta=3$，则$\cos\theta=-\frac{1}{2}$．又$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=120°$.

14.**【答案】** $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

【考点范围】 三角函数的诱导公式，商数关系，两角差的正切公式.

【思路点拨】 利用诱导公式及商数关系，将已知条件转化为 tanα 的值，再用两角差的正切公式求解.

【解析】由已知，$-\sin\alpha=2\sqrt{3}\cos\alpha$，则 $\tan\alpha=-2\sqrt{3}$，所以 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-6}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

15.【答案】3

【考点范围】双曲线的标准方程，对称性，离心率，直线的斜率.

【思路点拨】点 A，B 关于原点对称，设 P，A，B 三点的坐标，通过“点差法”求 $k_1\cdot k_2$ 与离心率的关系.

【解析】据题意，点 A，B 关于原点对称，设点 $A(x_0,\ y_0)$，$B(-x_0,\ -y_0)$，$P(x,\ y)$，则

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，两式相减，得 $\frac{x^2-x_0^2}{a^2}=\frac{y^2-y_0^2}{b^2}$，则 $\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}$.

因为 $e=2$，所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\frac{y+y_0}{x+x_0}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1=3$.

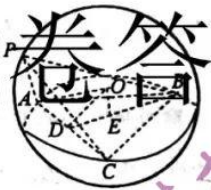
16.【答案】52π

【考点范围】球的截面性质、表面积，二面角，直线、平面垂直.

【思路点拨】因为球心与截面圆圆心的连线垂直于截面，其中$\triangle ABC$ 的外心就是其中心，$\triangle PAC$ 的外心是 AC 的中点，由此可构造直角三角形求球半径 OA 的长.

【解析】取 AC 的中点 D，连 BD. 设 E 为$\triangle ABC$ 的外心，则点 E 在 BD 上，且 $BE=2ED$.

因为 $PA\perp PC$，则 D 为 Rt$\triangle APC$ 的外心.



根据球的几何性质，有 $OE\perp$平面 ABC，$OD\perp$平面 PAC.

因为二面角 $P-AC-B$ 大小为120°，平面 $OAC\perp$平面 PAC，则二面角 $O-AC-B$ 大小为30°，所以$\angle ODE=30°$.

因为$\triangle ABC$ 是边长为6的正三角形，则 $BD=6\sin60°=3\sqrt{3}$，

所以 $ED=\frac{BD}{3}=\sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle OED$ 中，$OD=\frac{ED}{\cos30°}=2$.

在 Rt$\triangle ADO$ 中，因为 $AD=3$，则 $OA=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{13}$，所以球 O 的半径 $R=\sqrt{13}$，

表面积 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times13=52\pi$.

【命题意图】有关多面体的外接球及球的截面问题，是近两年高考全国Ⅰ卷的一个热点，对逻辑推理，直观想象，数学运算等核心素养有较高要求.本题要求考生根据球的截面性质，寻找球心位置，并合理利用二面角大小进行计算，有一定的思维难度.

三、解答题：

（一）必考题：

17.【考点范围】等差数列的定义，通项公式，前 n 项和公式，等比中项，裂项求和.

【思路点拨】（1）由已知可得$\{a_n\}$为等差数列，利用等比中项条件建立关于 a_1 的方程，再解方程可求 a_1 的值但要注意 $a_3\neq0$ 这一隐含条件，防止增根.

第5页（共12页）

（2）根据数列$\{a_n\}$的通项公式写出数列$\{b_n\}$的通项公式，用“裂项法”求其前 n 项和.

【解析】（1）因为$a_n-a_{n-1}=2(n\ge 2)$，则数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列. （1分）

则$a_3=a_1+2\times 2=a_1+4$，$S_4=4a_1+\frac{4\times 3}{2}\times 2=4(a_1+3)$，$S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}\times 2=5(a_1+4)$. （4分）

由已知，$S_4S_5=16a_3^2\ne 0$，则$5(a_1+3)(a_1+4)=4(a_1+4)^2$，即$a_1^2+3a_1-4=0$，即$(a_1+4)(a_1-1)=0$.

因为$a_3\ne 0$，则$a_1+4\ne 0$，所以$a_1=1$. （6分）

（2）因为数列$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列，则$a_n=1+2(n-1)=2n-1$. （8分）

由题设，$b_n=\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1)\cdot 2^n}=\frac{2(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)\cdot 2^n}=\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}$. （10分）

所以$T_n=(1-\frac{1}{3\cdot 2})+(\frac{1}{3\cdot 2}-\frac{1}{5\cdot 2^2})+\cdots+[\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}]=1-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}$. （12分）

18.【考点范围】直线、平面垂直的判断与性质，二面角及其平面角，余弦定理，空间向量，函数值域.

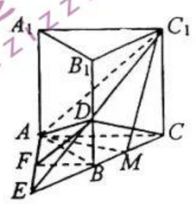
【思路点拨】（1）几何法：取 BC 的中点 M，然后证明 $CD\perp$平面 AMC_1.

向量法：通过几何或坐标运算，证明$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$.

（2）几何函数法：分别延长 CB，C_1D 相交于 E，连结 AE，则二面角 $D—AE—B$ 的平面角为 θ，若选取一个自变量 x，建立 θ 的三角函数与 x 的函数关系，然后求值域.

向量函数法：建立空间直角坐标系，取点 D 的竖坐标 t 为自变量，通过法向量建立 $\cos\theta$ 与 t 的函数关系，然后求值域.

【解析】解法一：（1）取 BC 的中点 M，连接 AM，C_1M.



因为$\triangle ABC$为正三角形，则 $AM\perp BC$. 由已知 $BB_1\perp AM$，则 $AM\perp$平面 BB_1C_1C，

所以 $AM\perp CD$. ① （2分）

因为 $BD=CM=1$，$BC=CC_1=2$，则 $Rt\triangle DBC\cong Rt\triangle MCC_1$，

所以$\angle BCD=\angle CC_1M$，从而$\angle DCC_1$与$\angle CC_1M$互余，所以 $C_1M\perp CD$. ②

结合①②知，$CD\perp$平面 AMC_1，所以 $CD\perp AC_1$. （5分）

（2）分别延长 CB，C_1D 相交于 E，连结 AE，则二面角 $D—AE—B$ 的平面角为 θ.

作 $BF\perp AE$，垂足为 F，连结 DF，则 $DF\perp AE$，所以$\angle BFD=\theta$. （6分）

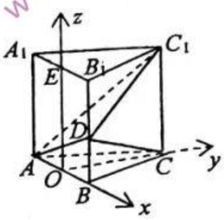
设 $BE=x(x>0)$，由余弦定理可得 $AE=\sqrt{x^2+2x+4}$，由等面积可得 $BF=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+2x+4}}$，

由相似三角形性质可得 $BD=\frac{2x}{x+2}$. （9分）

在 Rt△DBF 中，$\tan\theta=\dfrac{BD}{BF}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x+2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{2x}{x^2+4x+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{2}{x+\dfrac{4}{x}+4}}$. （10 分）

因为 $x+\dfrac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，则 $1\leq\tan\theta<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，所以 $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}}\in(\dfrac{\sqrt{21}}{7},\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$. （12 分）

解法二：（1）分别取 AB、A_1B_1 的中点 O、E，以 O 为原点，直线 AB，OC，OE 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系. （1 分）



因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底边长和侧棱长都为 2，D 为 BB_1 的中点，

则点 $A(-1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$D(1,\ 0,\ 1)$，$C_1(0,\ \sqrt{3},\ 2)$. （3 分）

从而 $\overrightarrow{CD}=(1,-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(1,\sqrt{3},2)$，则 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC_1}=1-3+2=0$，

所以 $CD\perp AC_1$. （5 分）

（2）设 $BD=t(0<t<2)$，则点 $D(1,\ 0,\ t)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0,t)$. （6 分）

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 AC_1D 的法向量，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y+2z=0\\ 2x+tz=0\end{cases}$，

取 z=2，则 $x=-t$，$y=\dfrac{t-4}{\sqrt{3}}$，所以 $\vec{n}=(-t,\dfrac{t-4}{\sqrt{3}},2)$. （9 分）

又平面 ABC 的法向量 $\vec{m}=(0,0,1)$，则 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+\dfrac{(t-4)^2}{3}+4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{t^2-2t+7}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{(t-1)^2+6}}$.

因为 0<t<2，则 $\sqrt{6}\leq\sqrt{(t-1)^2+6}<\sqrt{7}$，所以 $\cos\theta\in(\dfrac{\sqrt{21}}{7},\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$. （12 分）

19.【考点范围】频率分布直方图，散点图，古典概型，离散型随机变量的分布列和数学期望，由直方图估计平均数，回归直线方程.

【思路点拨】（1）根据频率分布求出样本中自身免疫力指标在(40，60]，(40，50]内的人数，用古典概型求 X 的分布列，再求数学期望；

（2）先由散点图样本数据求回归直线方程，再由直方图估计普通人群免疫力指标的平均值，然后由 y 的取值估计 x 的取值.

【解析】（1）由直方图知，自身免疫力指标在(40，50]内的人数为 0.008×10×100=8，在(50，60]内的人数为 0.002×10×100=2，则 X 的可能取值为 1，2，3. （1 分）

其中 $P(X=1)=\dfrac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{15}$，$P(X=2)=\dfrac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$，$P(X=3)=\dfrac{C_8^3C_2^0}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$. （4 分）

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

（5 分）

$EX=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{7}{15}=\frac{12}{5}$. （6 分）

（2）由散点图知，5 组样本数据$(x,\ y)$分别为(10，30)，(30，50)，(50，60)，(70，70)，(90，90)，且 x 与 y 具有线性相关关系. （7 分）

因为$\bar{x}=50$，$\bar{y}=60$，则 $b=\frac{10\times30+30\times50+50\times60+70\times70+90\times90-5\times50\times60}{10^2+30^2+50^2+70^2+90^2-5\times50^2}=\frac{7}{10}$，

$a=60-\frac{7}{10}\times50=25$，所以回归直线方程为 $y=0.7x+25$. （10 分）

由直方图知，免疫力指标的平均值为 $15\times\frac{26}{100}+25\times\frac{40}{100}+35\times\frac{24}{100}+45\times\frac{8}{100}+55\times\frac{2}{100}=27$. （11 分）

由 $y\leqslant27\times3=81$，得 $0.7x+25\leqslant81$，解得 $x\leqslant80$.

据此估计，疫苗注射量不应超过 80 个单位. （12 分）

20.【考点范围】抛物线的标准方程，焦点坐标，准线方程，直线的方程，直线与抛物线的位置关系，两直线的位置关系.

【思路点拨】（1）设点$M(x_0,\ y_0)$，根据已知条件建立关于x_0，y_0，p的方程组，再解方程组求p的值即得抛物线方程;

（2）设直线 l 的带参方程，联立抛物线的准线方程求出 D，E 两点的坐标，再设定点 $N(a,\ 0)$，由于线段 DE 为圆的直径，则 $DN\perp EN$，由此求出 a 的值.也可以由 D，E 两点的坐标求出以线段 DE 为直径的圆方程，再证明该圆与 x 轴的交点为定点.

【解析】（1）设点$M(x_0,\ y_0)$，因为点 M 在抛物线 C 上，$|OM|=2\sqrt{3}$，则$\begin{cases}y_0^2=2px_0\\x_0^2+y_0^2=12\end{cases}$.

得 $x_0^2+2px_0=12$，即 $(x_0+p)^2=p^2+12$. 因为$x_0>0$，则 $x_0=\sqrt{p^2+12}-p$. （3 分）

因为$|MF|=3$，则 $x_0+\frac{p}{2}=3$，即 $\sqrt{p^2+12}-\frac{p}{2}=3$，所以 $p^2+12=(\frac{p}{2}+3)^2$，化简得 $p^2-4p+4=0$，

解得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程是 $y^2=4x$. （5 分）

（2）设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4ty-4=0$.

设点 $A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，则 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$. （6 分）

设点 $P(\frac{m^2}{4},m)$，则 $k_{PA}=\frac{y_1-m}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{m^2}{4}}=\frac{4}{y_1+m}$，直线 PA 的方程为 $y-m=\frac{4}{y_1+m}(x-\frac{m^2}{4})$.

令 $x=-1$，得 $y=m-\frac{4}{y_1+m}(1+\frac{m^2}{4})=\frac{my_1-4}{y_1+m}$，所以点 $D(-1,\frac{my_1-4}{y_1+m})$. （8分）

同理，点 $E(-1,\frac{my_2-4}{y_2+m})$. （9分）

设以线段 DE 为直径的圆与 x 轴的交点为 $N(a,\ 0)$，则

$\overrightarrow{DN}=(a+1,-\frac{my_1-4}{y_1+m})$，$\overrightarrow{EN}=(a+1,-\frac{my_2-4}{y_2+m})$. （10分）

因为 $DN\perp EN$，则 $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{EN}=0$，即 $(a+1)^2+\frac{my_1-4}{y_1+m}\cdot\frac{my_2-4}{y_2+m}=0$，则

$(a+1)^2=-\frac{(my_1-4)(my_2-4)}{(y_1+m)(y_2+m)}=-\frac{m^2y_1y_2-4m(y_1+y_2)+16}{y_1y_2+m(y_1+y_2)+m^2}=\frac{4m^2+16mt-16}{m^2+4mt-4}=4$，得 $a=1$ 或 -3.

故以线段 DE 为直径的圆经过 x 轴上的两个定点 $(1,\ 0)$ 和 $(-3,\ 0)$. （12分）

【命题意图】解析几何有两条主线，一是求曲线的方程，二是根据曲线方程分析有关性质. 高考全国Ⅰ卷解析几何解答题基本以此设问，第一问都是求背景中的直线或圆锥曲线的方程，第二问近几年多是证明某性质. 其中2017年和2020年都是证明直线过定点，2018年证明两个角相等，试题整体难度有所降低. 由于课标对双曲线要求较低，所以高考解答题一般以直线与椭圆或直线与抛物线为背景. 考虑到历年高考中以直线与椭圆为背景的情形居多，考生易形成认知定式，所以本题以直线与抛物线为背景，第二问设计了一个以往没有考过的问题，即证明动圆过两定点，这样既传承了全国Ⅰ卷的命题特点，又能帮助考生打破思维习惯，适用命题变化.

21.【考点范围】导数与函数的单调性，函数最值，函数极值，函数零点，函数图象.

【思路点拨】（1）将 $f(x)$ 是减函数转化为 $f'(x)\le 0$ 恒成立，再分离参数求函数的最值.

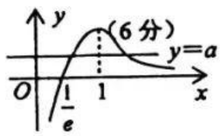
（2）在 $0<a<1$ 的条件下分析函数 $f(x)$ 的单调性，结合 $f(x)$ 的极值和极限值，考察 $f(x)$ 的图象在各单调区间内是否与 x 轴相交，由此确定其零点个数.

【解析】（1）$f'(x)=\ln x+1-ax$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内是减函数，则当 $x>0$ 时，$f'(x)\le 0$ 恒成立，即 $\ln x+1-ax\le 0$，即 $a\ge\frac{\ln x+1}{x}$ 恒成立. （2分）

设 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-(\ln x+1)}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$. （3分）

由 $g'(x)>0$，得 $\ln x<0$，即 $0<x<1$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递增，在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递减，从而 $g(x)_{\max}=g(1)=1$. 因为 $a\geqslant g(x)$ 恒成立，所以 a 的取值范围是 $[1,\ +\infty)$. （5分）

（2）由（1）知，$g(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递增，在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递减. 又当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$g(x)<0$；当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$g(x)>0$，则函数 $y=g(x)$ 的大致图象如图所示. （6分）



因为 $0<a<1$，则直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象有两个不同的交点，从而 $f'(x)$ 有两个变号零点，所以 $f(x)$ 有两个不同的极值点.

设 $f(x)$ 的两个极值点为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$．则 $\frac{1}{e}<x_1<1<x_2$．（7分）

当 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，因为 $a>g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则 $f'(x)=\ln x+1-ax<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\ x_1)$，$(x_2,\ +\infty)$ 上单调递减；当 $x_1<x<x_2$ 时，因为 $a<g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则 $f'(x)=\ln x+1-ax>0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_1,\ x_2)$ 上单调递增，从而 $f(x)$ 的极小值点为 x_1，极大值点为 x_2．（9分）

因为 $x_1<1<x_2$，则 $f(x_1)<f(1)=0$，$f(x_2)>f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_1,\ x_2)$ 内有一个零点．（10分）

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$，$f(x)=x^2(\frac{\ln x}{x}-\frac{a}{2})+\frac{a}{2}$，则当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，

所以 $f(x)$ 在 $(x_2,\ +\infty)$ 内有一个零点．（11分）

因为 $\lim\limits_{x\to0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)\to\frac{a}{2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 内有一个零点．综上分析，$f(x)$ 有3个零点．（12分）

【命题意图】除2019年外，高考全国Ⅰ卷解答题中最难的一个压轴题都是函数与导数的应用．其命题形式一般是给出一个含参数的超越函数，第一问大都是讨论函数的单调性，强调导数的基本应用；第二问每年都有所变化，注重导数的综合应用．其中2015年讨论函数的零点个数，2016年证明有关函数零点的不等式，2017年求函数有零点的条件，2018年证明与函数极值点(导函数的零点)有关的不等式，2019年证明函数零点的存在性，2020年求不等式恒成立的条件．不难看出，全国Ⅰ卷特别青睐对函数单调性和函数零点的考查．基于此，本题从这两方面立意，但设问方式与往年高考都有所不同，追求一点变化．

判断带参函数的图象是否穿越 x 轴是一个难点，常用的方法是找特殊点，利用函数零点存在性定理说明．本题第二问很难找点，需通过极限说明．考虑到“洛必达法则”不是考点，题设中就给出一个结论，要求考生直接或变通运用该性质解决问题，尝试命题形式上的一点突破与创新．

（二）选考题：

22.**【考点范围】**参数方程化普通方程，极坐标方程化直角坐标方程，直线的参数方程．

【思路点拨】（1）利用三角恒等变换消参，将参数方程化为普通方程；利用极坐标与直角坐标的互化公式，将极坐标方程化直角坐标方程．

（2）利用直线参数方程中参数的几何意义，将 $|PA|\cdot|PB|$ 转化为 A，B 两点对应的参数之积．

【解析】（1）因为 $y=\frac{\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha+1$，$x=\tan\alpha$，则 $y=x+1$．

所以曲线 C_1 的普通方程是 $y=x+1$．（3分）

由 $\rho^2=\dfrac{4}{2-\cos^2\theta}$，得 $2\rho^2-\rho^2\cos^2\theta=4$．将 $x^2+y^2=\rho^2$，$x=\rho\cos\theta$ 代入得 $x^2+2y^2=4$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．（5分）

（2）因为直线 C_1 过点 $P(0，1)$，倾斜角为45°，则直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）．

（8分）

代入 $x^2+2y^2=4$，得 $\dfrac{t^2}{2}+2(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t)^2=4$，即 $3t^2+4\sqrt{2}t-4=0$．

设方程的两根为 t_1，t_2，由参数 t 的几何意义知，$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\dfrac{4}{3}$．（10分）

23.**【考点范围】**绝对值不等式的解法，绝对值不等式的性质．

【思路点拨】（1）分区间讨论，去掉 $f(x)$ 解析式中的绝对值符号，再解不等式．

（2）利用绝对值不等式的性质求 $f(x)$ 的最小值，再解不等式求 a 的取值范围．

【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=|x-1|+2|x+3|$．（1分）

当 $x\geq1$ 时，$f(x)=(x-1)+2(x+3)=3x+5\in[8,+\infty)$，此时原不等式无解；（2分）

当 $-3\leq x<1$ 时，$f(x)=-(x-1)+2(x+3)=x+7\in[4,8)$，此时原不等式恒成立；（3分）

当 $x<-3$ 时，$f(x)=-(x-1)-2(x+3)=-3x-5$，由 $\begin{cases}x<-3\\ -3x-5<8\end{cases}$，得 $-\dfrac{13}{3}<x<-3$．（4分）

综上分析，原不等式解集是 $(-\dfrac{13}{3},1)$．（5分）

（2）因为 $f(x)=|x-a|+|x+3|+|x+3|\geq|x-a|+|x+3|\geq|(x-a)-(x+3)|=|a+3|$，

当 $x+3=0$ 且 $(x-a)(x+3)\leq0$，即 $x=-3$ 时取等号，则 $f(x)_{\min}=|a+3|$．（7分）

因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq2a+1$ 恒成立，则 $f(x)_{\min}\geq2a+1$，即 $|a+3|\geq2a+1$．（8分）

所以 $\begin{cases}a+3\geq0\\ a+3\geq2a+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+3<0\\ -(a+3)\geq2a+1\end{cases}$，解得 $-3\leq a\leq2$ 或 $a<-3$，即 $a\leq2$．

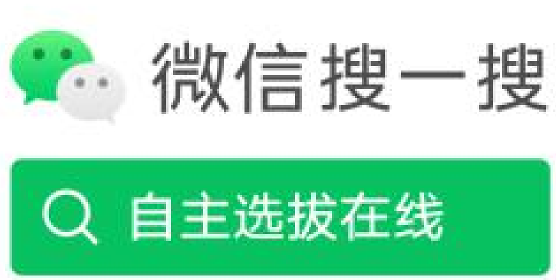
（10分）

所以 a 的取值范围是 $(-\infty，2]$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》