2023届高三二轮复习联考(三)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】$z=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$,所以 $z-\bar{z}=-3\mathrm{i}$.故选 B.

2.A 【解析】$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{y\mid y>0\}$,所以 $A\cap B=(0,5]$.故选 A.

3.D 【解析】令 $x=1$ 可得展开式中所有项的系数和为 $2^n=512$,所以 $n=9$,故 $T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r(3x)^{9-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r\cdot 3^{9-r}\cdot\mathrm{C}_9^r x^{9-\frac{3}{2}r}$,令 $9-\frac{3}{2}r=0$,则 $r=6$,所以展开式中的常数项为:$T_7=2\ 268$.故选 D.

4.B 【解析】对于 A ,在一个 2×2 列联表中,由计算得 K^2 的值,K^2 的值越大,两个变量有关的把握越大,故 A 错误;对于 B,$f(x)=P(x\leqslant\xi\leqslant x+2)$为偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,即 $P(-x\leqslant\xi\leqslant -x+2)=P(x\leqslant\xi\leqslant x+2)$,故可得 $\mu=\frac{-x+x+2}{2}=1$,故 B 正确;对于 C,$6\neq 1.2\times 4+2$,所以样本点的中心不可能为$(4,6)$,C 错误;对于 D,具有线性相关关系的两个变量 x,y 的相关系数为 r,则 $|r|$越接近于 1,x 和 y 之间的线性相关程度越强,故 D 错误.故选 B.

5.C 【解析】易知圆心 $C(2,2)$关于直线 $x+y=0$ 的对称点为 $C'(-2,-2)$,设反射光线所在的直线斜率为 k,则反射光线所在的直线方程为 $kx-y+2k-2=0$,所以$\frac{|4k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{2}$,整理得 $k^2-4k+1=0$,解得 $k=2+\sqrt{3}$ 或 $k=2-\sqrt{3}$.故选 C.

6.C 【解析】由 $\sin(\alpha+\beta)+2\cos(\alpha-\beta)=0$ 得$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=-2$,即$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-2$,由 $\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta=0$ 得 $\tan\alpha\tan\beta=-2$,所以 $\tan\alpha+\tan\beta=2$,故 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2}{3}$.故选 C.

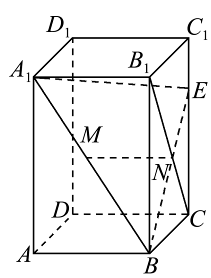
7.B 【解析】由题 $10^{2a}+b=2.8$,$10^{4a}+b=2.64$,得 $10^{4a}-10^{2a}+0.16=0$,解得 $10^{2a}=0.2$ 或 $10^{2a}=0.8$,$10^{2a}=0.2$ 时,$b=2.6$,不合题意舍去,当 $10^{2a}=0.8$ 时,$b=2$,所以 $y=10^{ax}+2$,当 $x=1$ 时,$y=10^a+2=\sqrt{0.8}+2=2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\approx 2.894$,所以在上市第 1 个月时,该款电子产品的售价约为 2.894 万元.故选 B.

8.A 【解析】双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$,若 $y_1y_2>0$ 恒成立,则 A,B 两点始终位于 x 轴同侧,则 $0<\angle AOB\leqslant\frac{\pi}{2}$,故$\frac{a}{b}\geqslant 1$,即 $a\geqslant b$,即 $a^2\geqslant c^2-a^2$,得 $e=\frac{c}{a}\leqslant\sqrt{2}$,所以双曲线离心率的取值范围为$(1,\sqrt{2}]$.故选 A.

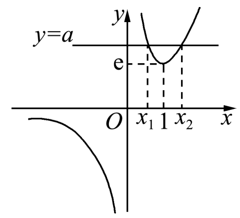
9.B 【解析】由题,当 $0\leqslant a<1$ 时,输出的 $b\in\left(\frac{1}{2},1\right]$;当 $1\leqslant a<2$ 时,输出的 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$;当 $2\leqslant a<4$ 时,输出的 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$;当 $4\leqslant a<16$ 时,输出的 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$;综上,当 $1\leqslant a<16$ 时,输出的 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.所以输出的 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$的概率 $P=\frac{15}{16}$.故选 B.

10.D 【解析】$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$,因为 $f(0)=\frac{1}{2}$,$f'(0)<0$,所以 $\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$,$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)$,当 $x\in[0,\pi]$时,$\omega x+\frac{5\pi}{6}\in\left[\frac{5\pi}{6},\omega\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$,$f(x)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,则$\frac{3\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{13\pi}{6}$,解得$\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{4}{3}$.故选 D.

11.C 【解析】连接 BN 并延长与 CC_1 交于 E,$\triangle BB_1N$ 与$\triangle ECN$ 相似,又 $A_1M=CN$,$A_1B=CB_1$,可得$\frac{CN}{B_1N}=\frac{NE}{BN}=\frac{A_1M}{BM}$,所以 $MN\parallel A_1E$,$MN\not\subset$平面 A_1ACC_1,$A_1E\subset$平面 A_1ACC_1,故 $MN\parallel$平面 A_1ACC_1,②正确;当 E 与 C_1 重合时,即当 M,N 分别为线段 A_1B,B_1C 上的中点时,$MN\perp$平面 BB_1D_1D,①错误;直线 MN 与平面 A_1ADD_1 所成角,即直线 A_1E 与平面 A_1ADD_1 所成角,设为 θ,则 $\sin\theta=\frac{1}{A_1E}$,$A_1E$ 最小时,θ 最



大，显然 $A_1E_{最小}=A_1C_1=\sqrt{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 θ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{4}$，④正确；由题易知，$BM=B_1N$，又直线 A_1B 和直线 B_1C 与平面 BB_1D_1D 所成的角相等，故点 M,N 到平面 BB_1D_1D 的距离相等，③正确.故选 C.



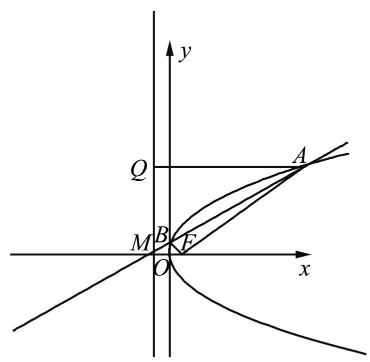
12.D 【解析】$f'(x)=2e^x-2ax$，则 $f'(x)=0$ 即 $e^x-ax=0$，显然 $x\neq0$，若方程有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，即方程 $a=\dfrac{e^x}{x}$ 有两个不相等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，即 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个交点，且横坐标分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，又 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x<0$ 时，$g(x)<0$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，所以 $a>g(1)=e$，A 错误；当 $a>e$ 时，$g(x)$ 的图象如图所示，易知 $0<x_1<1<x_2$，B 错误；若 $x_2=2x_1$，则 $a=\dfrac{e^{x_1}}{x_1}=\dfrac{e^{x_2}}{x_2}=\dfrac{e^{2x_1}}{2x_1}$，得 $x_1=\ln 2$，故 $a=\dfrac{e^{\ln 2}}{\ln 2}=\dfrac{2}{\ln 2}$，C 错误；因为 $\dfrac{e^{x_1}}{x_1}=\dfrac{e^{x_2}}{x_2}$，所以 $x_1e^{x_2}=x_2e^{x_1}$，又 $0<x_1<1$，所以 $e^{x_1}>1$，$x_2>1$，所以 $x_2e^{x_1}>1$，故 $x_1e^{x_2}>1$，所以 $\ln x_1+x_2>0$，D 正确.故选 D.

13.$\dfrac{2\pi}{3}$ 【解析】$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=3$，即 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量，所以 $1+1-2\times1\times1\times\cos\theta=3$，所以 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

14.3π 【解析】设该圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，则 $2\pi r=\pi l$，得 $l=2r$，所以该圆锥的轴截面为正三角形，又圆锥的内切球半径为 1，所以轴截面正三角形的内切圆半径为 1，故 $\dfrac{1}{2}\times2r\times2r\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times6r\times1$，解得 $r=\sqrt{3}$，所以圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=3$，故该圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times3=3\pi$.

15.$\dfrac{2\,023}{4\,050}$ 【解析】设 $a_n=f(n)$，$a_1=f(1)=2f(0)=2$，则 $a_{n+1}=2a_n-n$，即 $a_{n+1}-(n+2)=2[a_n-(n+1)]$，又 $a_1=2$，所以 $a_{n+1}-(n+2)=2[a_n-(n+1)]=0$，所以 $a_n=n+1$.故 $b_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，所以 $S_{2\,023}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2\,024}-\dfrac{1}{2\,025}=\dfrac{2\,023}{4\,050}$.

16.0 【解析】设直线 l 过抛物线的准线与 x 轴的交点为 M，如图，过点 A 作准线的垂线，垂足为 Q，由直线 l 的斜率为 $\dfrac{5}{12}$，易得 $\sin\angle AMF=\sin\angle MAQ=\dfrac{5}{13}$，故 $\cos\angle MAQ=\dfrac{12}{13}=\dfrac{|AQ|}{|AM|}$，由抛物线的性质可得 $|AQ|=|AF|$，所以 $\dfrac{|AF|}{|AM|}=\dfrac{12}{13}$，在 $\triangle AFM$ 中，由正弦定理可得：$\dfrac{|AM|}{\sin\angle AFM}=\dfrac{|AF|}{\sin\angle AMF}$，所以 $\sin\angle AFM=\dfrac{|AM|}{|AF|}\cdot\sin\angle AMF=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{5}{13}=\dfrac{5}{12}$，同理可得 $\sin\angle BFM=\dfrac{5}{12}$，故 $\angle AFM+\angle BFM=\pi$，所以 $k_1+k_2=0$.



17.**解**：(1)随机变量 X 的所有可能取值为 0,2,5,7.

则 $P(X=0)=\dfrac{C_4^2-C_2^2}{C_4^2}\times\dfrac{C_3^1}{C_4^2}=\dfrac{5}{12}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2-C_2^2}{C_4^2}\times\dfrac{C_3^2}{C_4^2}=\dfrac{5}{12}$，

$P(X=5)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}\times\dfrac{C_3^1}{C_4^2}=\dfrac{1}{12}$，

$P(X=7)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}\times\dfrac{C_3^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{12}$， …………………………………………………………………… 4 分

所以 X 的分布列为：

X	0	2	5	7
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

………………………………………………………………………… 5 分

所以 $E(X)=0\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+5\times\frac{1}{12}+7\times\frac{1}{12}=\frac{11}{6}$. ……………………………………………………… 6 分

(2)不再选取,理由如下: ………………………………………………………………………… 7 分

如果小茗同学只选择能判断符合题目要求的那个选项为解答结果,则他本题得分为 2 分,

若他再随机选取 1 个,则他本题的得分 Y 可能为:0 或 2,

$P(X=0)=\frac{1}{C_3^1}=\frac{1}{3}$, $P(X=2)=\frac{C_2^1}{C_3^1}=\frac{2}{3}$, $E(Y)=\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$,

因为 $E(Y)<2$,所以不再随机选取一个选项作为答题结果. ………………………………………………… 9 分

若他再随机选取 2 个,则他本题的得分 Y 可能为:0 或 5,

$P(X=0)=\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}=\frac{2}{3}$, $P(X=5)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$, $E(Y)=\frac{2}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 5=\frac{5}{3}$,

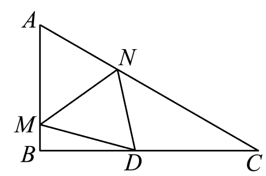
因为 $E(Y)<2$,所以不再随机选取 2 个选项作为答题结果. ……………………………………………… 11 分

综上,除了能判断的正确选项外,不再随机选取 1 个或 2 个选项作为答题结果. …………………………… 12 分

18.**解**:(1)由题,$B-C=A$,即 $B=A+C$,又 $A+B+C=\pi$,得 $B=\frac{\pi}{2}$, ……………………………………… 1 分

因为 $AC=2AB$,即 $\sin C=\frac{1}{2}$,

因为 $0<C<\frac{\pi}{2}$,故 $C=\frac{\pi}{6}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$,如图.



因为点 A 与点 D 关于 MN 对称,所以 $\angle AMN=\angle DMN=\theta$,

且 $AM=MD$,所以 $\angle BMD=\pi-2\theta$,

设 $AM=MD=x(0<x<1)$,则 $MB=1-x$,

$AM=MD=\frac{MB}{\cos\angle BMD}=\frac{1-x}{\cos(\pi-2\theta)}$,

即 $x=\frac{1-x}{\cos(\pi-2\theta)}$, ………………………………………………………………………… 3 分

整理得 $1-\cos 2\theta=\frac{1}{x}$,因为 $0<x<1$,所以 $1-\cos 2\theta>1$,即 $\cos 2\theta<0$,又 $0<2\theta\leqslant\pi$,

所以 $\frac{\pi}{2}<2\theta\leqslant\pi$, $\frac{\pi}{4}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,

所以 θ 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)在 $\triangle AMN$ 中,$\angle ANM=\frac{2\pi}{3}-\theta$,

由正弦定理得 $\frac{AN}{\sin\theta}=\frac{AM}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}$①, ……………………………………………………… 7 分

在 Rt$\triangle MBD$ 中,$\cos(\pi-2\theta)=\frac{1-AM}{AM}$,得 $AM=\frac{1}{2\sin^2\theta}$②, ……………………………………… 8 分

由①②得 $AN=\frac{1}{2\sin\theta\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}$,

令 $t=2\sin\theta\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{1}{2}+\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$， …………………………… 10 分

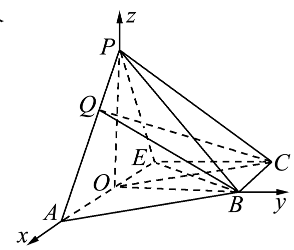
由(1)知 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

所以当 $2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，t 取得最大值 $\frac{3}{2}$，即 AN 取得最小值 $\frac{2}{3}$，

此时 $MN=AN$，故 MN 的长度为 $\frac{2}{3}$. …………………………………………………………………………………… 12 分

19.(1)**证明**：因为 $CE\perp AD$，所以 $CE\perp AE$，$CE\perp PE$，又 $PE\cap AE=E$，PE、$AE\subset$ 平面 PAE，

所以 $CE\perp$ 平面 PAE，$CE\subset$ 平面 $ABCE$，所以平面 $ABCE\perp$ 平面 PAE. ………………………… 1 分



在梯形 $ABCD$ 中，$DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=2$，所以 $AE=2$，

所以在四棱锥 $P-ABCE$ 中，$PE=AE=2$.

因为 $\angle PEA=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle PAE$ 为正三角形.

取 AE 中点 O，连接 PO，OB，OC，易得 $PO\perp AE$，$OB\perp AE$，

由面面垂直的性质可得 $PO\perp$ 平面 $ABCE$，

所以 $PO\perp BE$. ……………………………………………………………………………………………………… 3 分

又 $BC=CE=OE=1$，$CE\perp AE$，$CE\perp BC$，所以四边形 $OBCE$ 为正方形，所以 $BE\perp OC$，

又 $OC\cap PO=O$，OC、$PO\subset$ 平面 POC，

所以 $BE\perp$ 平面 POC， ………………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $PC\subset$ 平面 POC，

所以 $BE\perp PC$. ……………………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)**解**：由(1)知 OA，OB，OP 两两垂直，以 O 为坐标原点，以 OA，OB，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则：$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，由 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}$ 得 $Q(1-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$， ………………………… 6 分

则 $\overrightarrow{BQ}=(1-\lambda,-1,\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，设平面 QBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

故 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(1-\lambda)x-y+\sqrt{3}\lambda z=0,\\ -x=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $x=0$，$y=\sqrt{3}\lambda$，

所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3}\lambda,1)$， ……………………………………………………………………………… 8 分

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$， …………………………………………………………… 9 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，…………………………………………………… 10 分

解得 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{3}$(舍).

所以实数 λ 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………………………………………………… 12 分

20.**解**：(1)设椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，则 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，①

将 $x=-c$ 代入椭圆方程得：$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以 $\frac{2b^2}{a}=3$，② ………………………………… 2 分

又 $a^2=b^2+c^2$，③

综合①②③解得：$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，

所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)存在. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

设 $P(m,0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 $l:x=ny-1$,

联立方程:$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=ny-1,\end{cases}$ 得 $(3n^2+4)y^2-6ny-9=0$,

所以 $y_1+y_2=\frac{6n}{3n^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-9}{3n^2+4}$, …………………………………………………… 7 分

$\overrightarrow{PA}=(x_1-m,y_1)$,$\overrightarrow{PB}=(x_2-m,y_2)$,

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2+y_1y_2$

$=(ny_1-1)(ny_2-1)-m(ny_1+ny_2-2)+m^2+y_1y_2$

$=(n^2+1)y_1y_2-(mn+n)(y_1+y_2)+m^2+2m+1$ ……………………………………………… 9 分

$=\frac{-9(n^2+1)}{3n^2+4}-\frac{6n(mn+n)}{3n^2+4}+m^2+2m+1=\frac{3m^2n^2+4m^2-12n^2+8m-5}{3n^2+4}$

$=\frac{m^2(3n^2+4)-4(3n^2+4)+8m+11}{3n^2+4}=m^2-4+\frac{8m+11}{3n^2+4}$, ……………………………… 10 分

当 $8m+11=0$,即 $m=-\frac{11}{8}$ 时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 $-\frac{135}{64}$,

所以存在点 $P\left(-\frac{11}{8},0\right)$,使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值. ……………………………………………… 12 分

21.(1)**解**:$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x+1}-a$,

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增;

且 $f(0)=0$,所以 $f(x)$ 存在唯一零点; ……………………………………………………………… 2 分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{a}-1>-1$,

当 $x\in\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x\in\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}-1\right)=a-1-\ln a$,且 $x\to+\infty$,$f(x)\to-\infty$;$x\to-1$,$f(x)\to-\infty$.

若 $f(x)$ 存在唯一零点,则 $a-1-\ln a=0$. ……………………………………………………………… 4 分

设 $h(a)=a-1-\ln a$,则 $h'(a)=1-\frac{1}{a}$,

当 $a\in(0,1)$ 时,$h'(a)<0$,$h(a)$ 单调递减;当 $a\in(1,+\infty)$ 时,$h'(a)>0$,$h(a)$ 单调递增,

所以 $h(a)\geqslant h(1)=0$,故当 $a-1-\ln a=0$ 时,$a=1$,

所以 $f(x)$ 存在唯一零点时,实数 a 的取值范围为 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$. ……………………………………… 6 分

(2)**证明**:由(1)知:当 $a=1$ 时,$f(x)=\ln(x+1)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)<f(0)=0$,即 $\ln(x+1)<x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

令 $x=3^{-n}$,$n=1,2,3,\cdots$,则 $\ln(1+3^{-n})<3^{-n}$, ………………………………………………… 8 分

所以 $\ln[(1+3^{-1})(1+3^{-2})(1+3^{-3})\cdots(1+3^{-n})]=\ln(1+3^{-1})+\ln(1+3^{-2})+\ln(1+3^{-3})+\cdots+\ln(1+3^{-n})$

$<3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+\cdots+3^{-n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2}$, ……………………………… 10 分

所以 $\ln[(1+3^{-1})(1+3^{-2})(1+3^{-3})\cdots(1+3^{-n})]<\frac{1}{2}=\ln\sqrt{e}$，

所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$(1+3^{-1})(1+3^{-2})(1+3^{-3})\cdots(1+3^{-n})<\sqrt{e}$. ………………………… 12 分

22.**解**：(1)由 $\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta-4=0$ 得：$\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta-4=0$，………………………… 2 分

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入得：$x^2+4y^2=4$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………… 4 分

(2)将 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得：$(\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha)t^2+4\sqrt{2}t\cos\alpha+4=0$，

$\Delta=32\cos^2\alpha-4\times4(\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha)=0$，………………………… 7 分

整理得 $\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha=0$，即 $(\cos\alpha-2\sin\alpha)(\cos\alpha+2\sin\alpha)=0$，

得 $\cos\alpha=2\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha=-2\sin\alpha$，………………………… 9 分

得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，

所以直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$. ………………………… 10 分

23.**解**：(1)当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$，不合题意；

当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\{0\}$，不合题意；………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，$-a\leqslant 2x-a\leqslant a$，即 $0\leqslant x\leqslant a$，

因为不等式的解集为 $[0,4]$，所以 $a=4$. ………………………… 4 分

(2)由(1)知，$m+n=4$，设 $m+2n=p, 2m+n=q$，

则 $p+q=3m+3n=12$，………………………… 6 分

$\frac{1}{m+2n}+\frac{1}{2m+n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(p+q)$ ………………………… 8 分

$=\frac{1}{12}\left(2+\frac{q}{p}+\frac{p}{q}\right)\geqslant\frac{1}{12}(2+2\sqrt{\frac{q}{p}\times\frac{p}{q}})=\frac{1}{3}$，

当且仅当 $p=q$ 即 $m=n=2$ 时，等号成立，

所以 $\frac{1}{m+2n}+\frac{1}{2m+n}$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$. ………………………… 10 分