天一大联考

2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(四)

文科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

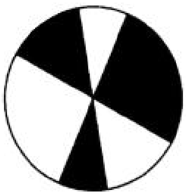
1. 已知集合 $M=\{y|y=1-x^2\}$,$N=\{x||2x-1|\geqslant 1-2x\}$,则 $M\cap N=$

A. $(0,1]$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　　D. $(-\infty,1]$

2. 复数 $z=\frac{1-2i}{3+i}$ 的共轭复数对应的点在复平面内的

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 如图所示的圆盘的三条直径把圆分成六部分,往圆盘内任投一飞镖(大小忽略不计),则飞镖落到阴影部分内的概率为



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

4. 已知命题 p:$\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $e^{-x}+1=\sin x$;命题 q:若 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $x>|y|$,则 $x^2>y^2$.下列命题为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $(\neg p)\wedge q$　　C. $p\wedge(\neg q)$　　D. $p\vee(\neg q)$

5. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,且满足 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|\cos\theta=-2$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. -4　　B. -6　　C. -7　　D. -8

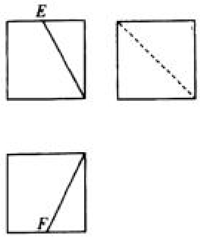
6. 已知 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,且 $3\cos 2\alpha+8\sin\alpha+5=0$,则 $\cos\alpha=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

7. 若函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象过点 $M\left(\frac{2\pi}{3},-3\right)$,直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后恰好经过 $f(x)$ 上与点 M 最近的零点,则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间是

A. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$　　C. $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$　　D. $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$

8. 一个多面体的正视图、侧视图、俯视图都是边长为1的正方形，如图所示，E,F是所在边的中点，则该多面体的表面积为



A. $5+\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $5+\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\frac{18+\sqrt{6}}{4}$　　D. $3+\sqrt{6}$

9. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，直线$l$过$F$点与一条渐近线垂直，原点到$l$的距离等于虚轴的长，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{5}{4}$

10. 拉格朗日中值定理又称拉氏定理，是微积分学中的基本定理之一，它反映了函数在闭区间上的整体平均变化率与区间某点的局部变化率的关系. 其具体内容如下：若$f(x)$在$[a,b]$上满足以下条件：①在$[a,b]$上图象连续，②在(a,b)内导数存在，则在(a,b)内至少存在一点c，使得$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$（$f'(x)$为$f(x)$的导函数）. 则函数$f(x)=xe^{x-1}$在$[0,1]$上这样的c点的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$a=3,c=2,B=2C$，则$\triangle ABC$的面积为

A. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$　　B. $\sqrt{15}$　　C. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

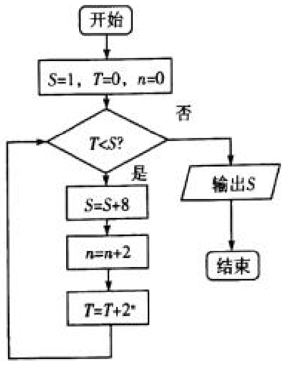
12. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，M,N为抛物线上的两点（与坐标原点不重合），$MA\perp l$于A，$NB\perp l$于B，已知MN的中点D的坐标为$(2,1)$，$\triangle ABF$与$\triangle MNF$的面积比为$2:1$，则p的值为

A. 4　　B. 3　　C. 1　　D. 1或$\frac{1}{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2(x\leq 1),\\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x>1),\end{cases}$则$f(x)$的最大值为________.

14. 执行如图所示的程序框图，输出的$S=$________.



15. 若x,y满足约束条件$\begin{cases}x-y+2\geq 0,\\ x+2y+2\geq 0,\\ 2x+y-2<0,\end{cases}$则$z=3x-y$的取值范围为________.

16. 在平面四边形$PACB$中，已知$\angle APB=120°$，$PA=PB=2\sqrt{3}$，$AC=10$，$BC=8$. 沿对角线AB折起得到四面体$P-ABC$，当PA与平面ABC所成的角最大时，该四面体的外接球的半径为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 a_1,a_2,a_4 成等比数列，$2a_3,10,a_4$ 成等差数列.

(Ⅰ)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(Ⅱ)设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，令 $b_n=\frac{1}{S_n}$，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<1$.

18. (12 分)

为提高空气质量，缓解交通压力，某市政府推行汽车尾号单双号限行. 交通管理部门推出两个时间限行方案，方案 A：早晨六点到夜晚八点半限号；方案 B：早晨七点到夜晚九点限号. 现利用手机问卷对 600 名有车族进行民意考察，考察其对 A，B 方案的认可度，并按年龄段统计，22 ~ 40 岁为青年人，41 ~ 60 岁为中年人，人数分布表如下：

年龄段	[22,30]	[31,40]	[41,50]	[51,60]
人数	180	180	160	80

现利用分层抽样从上述抽取的 600 人中再抽取 30 人，进行深入调查.

(Ⅰ)若抽取的青年人与中年人中分别有 12 人和 5 人同意执行 B 方案，其余人同意执行 A 方案，完成下列 2×2 列联表，并判断能否有 90% 的把握认为年龄层与是否同意执行方案 A 有关；

	同意执行 A 方案	同意执行 B 方案	总计
青年		12	
中年		5	
总计			30

(Ⅱ)若从同意执行 B 方案的 4 个青年人和 2 个中年人中，随机抽取 3 人进行访谈，求抽取的 3 人中青、中年都有的概率.

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

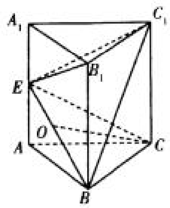
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (12 分)

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC=\sqrt{3}$，$AB=1$，$AA_1=AC=2$，E 为棱 AA_1 的中点，O 为 BE 上一点.

(Ⅰ)证明：$CO\perp B_1E$；

(Ⅱ)求 C 到平面 BEC_1 的距离.



20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆的右焦点与右顶点及上顶点构成的三角形面积为 $\sqrt{2}-1$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程.

（Ⅱ）已知直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点，若点 Q 的坐标为$\left(\frac{7}{4},0\right)$，问：是否存在 k，使得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}>1$？若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}-a-2\ln x(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在 $[1,2)$ 上存在单调递减区间，求 a 的取值范围；

（Ⅱ）当 $-2<a<0$ 时，证明：对任意 $x\in(0,+\infty)$，$\frac{a^2}{2(x-a)}<\ln(x-a)-\ln x$ 恒成立.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\sin\left(\frac{\pi}{2}+\sigma\right),\\ y=4-t\cos\left(\sigma-\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$（其中 t 为参数，σ 为常数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$，射线 l_0 的极坐标方程为 $\theta=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$，射线 l_0 与曲线 C 交于 O,M 两点.

（Ⅰ）写出当 $\sigma=\pi$ 时 l 的极坐标方程以及曲线 C 的参数方程；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，若射线 l_0 与直线 l 交于点 N，求$\frac{|OM|}{|ON|}$的取值范围.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x+3|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$.

（Ⅰ）求不等式 $f(x)\leqslant 4x+7$ 的最小整数解 m；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，对任意 $a,b\in(-m,+\infty)$，若 $a+b=4$，求 $W=\frac{b^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1}$的最小值.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

微信搜一搜
自主选拔在线