2020 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅰ卷　理科数学　参考答案

本试卷防伪处为：

则实数 m 的值为

求曲线 C_1 的普通方程

1. C 【解析】$\because \complement_U A=\{x|(x+1)(x-2)\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\leqslant 1\}$，$\therefore (\complement_U A)\cap B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$.

2. A 【解析】$\because z=\frac{a}{1+2\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\frac{a(1-2\mathrm{i})}{5}+\mathrm{i}=\frac{a}{5}+(1-\frac{2a}{5})\mathrm{i}$，所以$\begin{cases}x=\frac{a}{5}\\ y=1-\frac{2a}{5}\end{cases}$，$\therefore y=-2x+1$.

3. B 【解析】因为向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{11}{2}$，所以$2|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2(m^2+4)+2m-2=\frac{11}{2}$，$\therefore m^2+m+\frac{1}{4}=0$，$\therefore m=-\frac{1}{2}$.

4. D 【解析】总人数为 $3+9+27+81+243=363$ 人，D 正确.

5. B 【解析】$b=\log_4\frac{4}{5}=\frac{\log_2\frac{4}{5}}{\log_2 4}=\log_2(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}$，$c=\log_8\frac{8}{9}=\frac{\log_2\frac{8}{9}}{\log_2 8}=\log_2(\frac{8}{9})^{\frac{1}{3}}=\log_2\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$，$\because \frac{9}{16}<\frac{4}{5}<\frac{4}{\sqrt[3]{81}}$，$\therefore \frac{3}{4}<(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}<\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$，所以 $a<b<c$.

6. C 【解析】数据的极差为 $15.1-8.8=6.3$，分成 7 组，组距为 0.9，第 5 组的范围是[12.4，13.3]，中位数为 12.5 应位于第 5 组内.

7. A 【解析】根据题意，函数 $f(x)$ 图象的纵坐标不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}$倍，$\therefore y=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，当 $x\in[0,2\pi]$时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}]$，$\because f(x)$在$[0,2\pi]$上恰有 5 个不同的 x 值，使其取到最值，$\therefore \frac{9\pi}{2}\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{2}$，$\therefore \frac{13}{6}\leqslant\omega<\frac{8}{3}$.

8. B 【解析】设 $OP=r$，过点 D 作 OC 的平行线交与 CD 平行的半径于点 E，则 $OE=OC=CD=OD=r$，$PC=PD=\sqrt{2}r$，所以$\angle PDE$(或其补角)为异面直线 OC 与 PD 所成的角，解三角形 PDE，$PE=PD=\sqrt{2}r$，$DE=r$，所以 $\cos\angle PDE=\frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{2}r}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

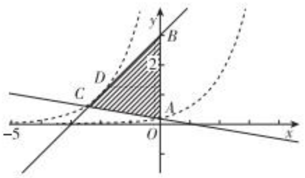
9. A 【解析】由题意，$F_1(-2,0)$，抛物线 C_2：$y^2=8x$，计算可得$|PF_1|=\sqrt{2}$，$|PF_2|=2a-\sqrt{2}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，过 Q 作 $QM\perp$直线 l 于 M，由抛物线定义知$|QF_2|=|QM|$，$\because \frac{|F_1F_2|}{|PF_2|}=\frac{|MQ|}{|PQ|}$，$\therefore \frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{|MQ|}{3\sqrt{2}-|MQ|}$，$\therefore |MQ|=12(3-2\sqrt{2})$.

10. B 【解析】由$\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{2}=1$ 得 $a^2+4b^2=8$. 由辅助角公式可得$\sqrt{a}\cos\theta+\sqrt{2b}\sin\theta=\sqrt{a+2b}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\sqrt{a+2b}\leqslant\sqrt{2\sqrt{\frac{a^2+4b^2}{2}}}=2$（其中 $\tan\varphi=\sqrt{\frac{a}{2b}}$），所以最大值为 2，等号成立的条件为 $a=2b=2$，所以$\sqrt{a}\cos\theta+\sqrt{2b}\sin\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore \tan\theta=1$.

11. C 【解析】由 MN 为直径的圆过 F_2，由$\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}^2$ 知，$MF_2=NF_2$，且 $MF_2\perp NF_2$，设$|MF_2|=|NF_2|=m$，则$|MN|=\sqrt{2}m$，由$|MF_2|-|MF_1|=2a$，$|NF_1|-|NF_2|=2a$，两式相加可得$|NF_1|-|MF_1|=|MN|=4a$，即有 $m=2\sqrt{2}a$，设 H 为 MN 的中点，在直角三角形 HF_1F_2 中，可

得 $4c^2=4a^2+(2a+2\sqrt{2}a-2a)^2$，化为 $c^2=3a^2$，即 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，故①正确；又 $\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{2}$，故②正确；因为 $|HF_2|=\frac{1}{2}|MN|=2a$，所以 $|HF_1|=\sqrt{|F_1F_2|^2-|HF_2|^2}=2\sqrt{c^2-a^2}$，所以直线 l 的斜率为 $\frac{|HF_2|}{|HF_1|}=\frac{2a}{2\sqrt{c^2-a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故③错误.

12. B 【解析】由题意 $f(0)=1-a=0$，$\therefore a=1$，所以 $f(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x$，因为 $f'(x)=e^x+\frac{1}{e^x}+2\cos x\geqslant 2+2\cos x\geqslant 0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}y-3\leqslant x\leqslant 0\\1-6y\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$，作出可行域如图，其中 $A(0,\frac{1}{6})$，$B(0,3)$，$C(-\frac{17}{7},)$，由图可知，设 $y=e^{x-z}$ 的图象与直线 $y=x+3$ 切于点 $D(x_0,y_0)$，由 $y=e^{x-z}$ 得 $y'=e^{x-z}$，令 $e^{x_0-z}=1$ 得 $x_0=z$，所以 $y_0=1\in(\frac{4}{7},3)$，故 $y=e^{x-z}$ 与 $y=x+3$ 切于点 $D(-2,1)$ 时，z 取得最小值，$z_{\min}=(-2)-\ln 1=-2$.



13. $\frac{1}{5}$ 【解析】由图可知，来自影响稍弱区的指标有激励措施、工作环境、人际关系等三项，则这两项来自影响稍弱区的概率 $P=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

14. $[1,2]$ 【解析】根据题意，$a=1$，所以 $f(x)=(\frac{1}{2})^{|x-1|}$，$\because (\frac{1}{2})^{|2x-3|}\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore |2x-3|\leqslant 1$，$\therefore -1\leqslant 2x-3\leqslant 1$，$\therefore 1\leqslant x\leqslant 2$.

15. $\frac{\pi}{3}$；$\frac{5\sqrt{3}}{12}$ 【解析】由正弦定理可得 $\sin B\cos C=(2\sin A-\sin C)\cos B$，得 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin A\cos B$，所以 $\sin(B+C)=2\sin A\cos B$，因为 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，$\sin A\neq 0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. 因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. 又 $b=2$，$a+c=3$，所以 $a^2+c^2-2ac\cos B=b^2$，$\therefore (a+c)^2-3ac=4$，$\therefore ac=\frac{5}{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{12}$.

16. $\frac{1849\pi}{16}$ 【解析】六棱柱笔筒的边长为 6 cm，高 18 cm，铁棒与底面六边形的最长对角线、对棱的部分长 h 构成直角三角形，所以 $2\sqrt{85}=\sqrt{12^2+h^2}$，$\therefore h=14$，所以容器内水面的高度为 14 cm. 设球的半径为 R，则球被六棱柱体上面截得圆的半径为 $3\sqrt{3}$，球心到截面圆的距离为 $R-4$，则 $R^2=(R-4)^2+(3\sqrt{3})^2$，解得 $R=\frac{43}{8}$，$\therefore$ 球的表面积为 $4\pi\times(\frac{43}{8})^2=\frac{1849\pi}{16}$ cm².

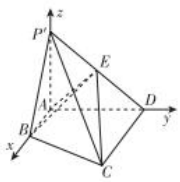
17. 【解析】(1) 由平面图可知，$AB\perp P'A$，$AB\perp AD$，$P'A\cap AD=A$，

所以 $AB\perp$ 平面 $P'AD$，所以 $AB\perp P'D$. …… 2 分

因为 E 为 $P'D$ 的中点，$P'A=AD$，$\therefore AE\perp P'D$. …………………………………………………… 4 分

因为 $AE\cap AB=A$，所以 $P'D\perp$ 平面 ABE. …………………………………………………………… 5 分

(2) 因为 $P'-ABCD$ 的正视图与 $\triangle P'AD$ 全等，所以 $\triangle P'AD$ 为直角三角形，故 $P'A\perp AD$.



以 A 为原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，AP' 为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$D(0,1,0)$，$P'(0,0,1)$，$B(\frac{1}{2},0,0)$，$C(1,1,0)$，$E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

所以 $\overrightarrow{P'D}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{BE}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{2},1,0)$，…………………………………… 7 分

设平面 BEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot n=0\\\overrightarrow{BC}\cdot n=0\end{cases}$，∴$\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\\\frac{1}{2}x+y=0\end{cases}$，

令$x=2$，∴$n=(2,-1,3)$，………………… 9分

因为$\overrightarrow{PD}$为平面ABE的一个法向量，

设二面角$A-BE-C$为θ，

所以$\cos\langle\overrightarrow{PD},n\rangle=\frac{\overrightarrow{PD}\cdot n}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|n|}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，……

…………………………………………… 11分

因为二面角$A-BE-C$为钝角，

所以$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，故二面角$A-BE-C$的余弦值为$-\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………………………… 12分

18.【解析】(1)由$T_1=2b_1-1$得，$b_1=1$，……… 1分

因为$T_n-T_{n-1}=(2b_n-n)-(2b_{n-1}-(n-1))(n\geqslant 2)$，

所以$b_n=2b_{n-1}+1$，………………………… 3分

从而由$b_n+1=2(b_{n-1}+1)$得，$\frac{b_n+1}{b_{n-1}+1}=2(n\geqslant 2)$，

…………………………………………… 4分

所以$\{b_n+1\}$是以2为首项，2为公比的等比数列.

故$b_n=2^n-1$. ………………………………… 5分

(2)根据题意，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，首项为a_1，

则$a_1+4d=6$，$6a_1+15d=27$，

解得$a_1=2$，$d=1$，∴$a_n=n+1$.

所以$a_n\cdot b_n=(n+1)(2^n-1)=(n+1)\times 2^n-(n+1)$，……………………………………… 7分

设$A_n=2\times 2+3\times 2^2+\cdots+(n+1)\times 2^n$，

则$2A_n=2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^{n+1}$，

所以$-A_n=2^2+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\times 2^{n+1}$

$=2+\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\times 2^{n+1}=-n\cdot 2^{n+1}$，

所以$A_n=n\cdot 2^{n+1}$，………………………… 10分

由$B_n=2+3+\cdots+n+1=\frac{(2+n+1)n}{2}=\frac{n^2+3n}{2}$.

…………………………………………… 11分

所以数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和为$A_n-B_n=n\cdot 2^{n+1}-\frac{n^2+3n}{2}$. ……………………………… 12分

19.【解析】(1)填表如下：

	使用寿命不高于6年	使用寿命不低于7年	总计
A型	30	70	100
B型	50	50	100
总计	80	120	200

由列联表可知$K^2=\frac{200(50\times 70-30\times 50)^2}{100\times 100\times 80\times 120}\approx$

$8.33>6.635$，………………………………… 2分

故有99%的把握认为出租车的使用寿命年数与汽车车型有关. ………………………………… 3分

(2)由题意可知，A型车使用寿命不低于7年的车数占$\frac{7}{10}$，低于7年的车数占$\frac{3}{10}$；B型车使用寿命不低于7年的车数占$\frac{1}{2}$，低于7年的车数占$\frac{1}{2}$. 且X可能的取值为0,1,2. ………………………… 4分

$P(X=0)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$，

$P(X=1)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

$P(X=2)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{20}$，……………………… 6分

X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{20}$

其数学期望$E(X)=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{7}{20}=1.2$. ……………………………………… 8分

(3)用频率估计概率，这100辆A款出租车的平均利润为：

$\frac{1}{100}(19\times 10+25\times 20+31\times 45+37\times 25)$

$=30.1$(万元)，……………………………… 10分

这100辆B款车的平均利润为：

$\frac{1}{100}(22\times 15+28\times 35+34\times 40+40\times 10)$

$=30.7$(万元)，

故会选择采购B款车型. …………………… 12分

20.【解析】(1)∵$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+m}$，$x=0$是$f(x)$的

极值点，

$\therefore f'(0)=1-\frac{1}{m}=0$，解得 $m=1$. 经检验 $m=1$，符合题意。…………………………………… 2 分.

$\therefore f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}=\frac{e^x(x+1)-1}{x+1}$，

设 $g(x)=e^x(x+1)-1$，

则 $g'(x)=e^x(x+1)+e^x>0$，

所以 $g(x)$在$(-1,+\infty)$上为增函数，

又$\because g(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，

即 $f'(x)>0$；

当$-1<x<0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$. …… 4 分

所以 $f(x)$在$(-1,0)$上为减函数；在$(0,+\infty)$上为增函数；

因此，$f(x)$的最小值为 $f(0)=1$. ………… 5 分

(2)由题意，$e^x<bx+f(x)\Leftrightarrow \ln(x+1)<bx$，

设 $h(x)=\ln(x+1)-bx$，

则 $h'(x)=\frac{1}{1+x}-b$，………………………… 6 分

(ⅰ)若 $b\geqslant 1$，则 $x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)=\frac{1}{1+x}-b\leqslant 0$，

$\therefore h(x)=\ln(1+x)-bx$ 在$(0,+\infty)$上为减函数，

$\therefore h(x)=\ln(1+x)-bx<h(0)=0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立；…………………………………… 8 分

(ⅱ)若 $b\leqslant 0$，则 $x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)=\frac{1}{1+x}-b>0$，

$\therefore h(x)=\ln(1+x)-bx$ 在$(0,+\infty)$上为增函数，

$\therefore h(x)=\ln(1+x)-bx>h(0)=0$，

不能使 $h(x)<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立； … 10 分

(ⅲ)若 $0<b<1$，则 $h'(x)=\frac{1}{1+x}-b=0$ 时，$x=\frac{1}{b}-1$，当 $x\in(0,\frac{1}{b}-1)$时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)=\ln(1+x)-bx$ 在$(0,\frac{1}{b}-1)$上为增函数，此时 $h(x)=\ln(1+x)-bx>h(0)=0$，

$\therefore$不能使 $h(x)<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立；

综上所述，b 的取值范围是$[1,+\infty)$. …… 12 分

21.【解析】(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$，

联立方程$\begin{cases} y=mx-\frac{m^2}{2}, \\ ax^2+by^2=1 \end{cases}$

得$(bm^2+a)x^2-m^3bx+\frac{bm^4}{4}-1=0$，

由 $\Delta>0$，且 $x_1+x_2=\frac{m^3b}{bm^2+a}$，

因此 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m^3b}{2bm^2+2a}$，

将其代入 $y=mx-\frac{m^2}{2}$得 $y_0=-\frac{m^2a}{2bm^2+2a}$，

因为$\frac{y_0}{x_0}\cdot m=-\frac{a}{b}$，…………………………… 2 分

所以$-\frac{a}{b}=-\frac{1}{4}$，$\therefore b=4a$，

所以直线 OD 方程为 $y=-\frac{1}{4m}x$，………… 3 分

可得$-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4m}t$，$\therefore t=m$，

代入 $y=mx-\frac{m^2}{2}$，得 $P(m,\frac{m^2}{2})$，消去 m，

可得 P 点的轨迹方程为 $x^2=2y(x\neq 0)$. … 5 分

(2)根据题意，$b=4$，所以椭圆 C 的方程为 $x^2+4y^2=1$.

由(1)知，$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2m^3}{4m^2+1}$，

$y_0=-\frac{m^2}{2(4m^2+1)}$，………………………… 6 分

对于直线 l，令 $x=0$，$y=-\frac{m^2}{2}$，所以 $G(0,-\frac{m^2}{2})$，

所以 $P(m,\frac{m^2}{2})$，$F(0,\frac{1}{2})$，

$D(\frac{2m^3}{4m^2+1},-\frac{m^2}{2(4m^2+1)})$，$M(m,-\frac{1}{4})$， … 7 分

所以 $S_{\triangle PFG}=\frac{1}{2}|GF||m|=\frac{1}{4}|m|(m^2+1)$，

$S_{\triangle PDM}=\frac{1}{2}|PM|\cdot|m-x_0|=\frac{|m|(2m^2+1)^2}{8(4m^2+1)}$，

所以$\frac{S_{\triangle PFG}}{S_{\triangle PDM}}=\frac{2(4m^2+1)(m^2+1)}{(2m^2+1)^2}$，………… 9 分

令 $n=2m^2+1$，则$\frac{S_{\triangle PFG}}{S_{\triangle PDM}}=\frac{(2n-1)(n+1)}{n^2}=-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+2$，…………………………………… 11 分

当$\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$，即 $n=2$ 时，$\frac{S_{\triangle PFG}}{S_{\triangle PDM}}$取得最大值$\frac{9}{4}$，此时

$m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，满足 $\Delta>0$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1)由 $y=\frac{2(1-k^2)}{1+k^2}$，得 $\frac{y}{2}=-1+\frac{2}{1+k^2}(y\neq-2)$，即 $\frac{y}{2}+1=\frac{2}{1+k^2}$. ………………… 2 分

又 $x+1=\frac{4k}{1+k^2}$，两式相除得 $k=\frac{x+1}{y+2}$，代入 $x+1=\frac{4k}{1+k^2}$，得 $\frac{4\times\frac{x+1}{y+2}}{1+(\frac{x+1}{y+2})^2}=x+1$，………… 4 分

整理得 $(x+1)^2+y^2=4(y\neq-2)$，即为曲线 C_1 的普通方程. ………………………………… 5 分

(2)设圆心 $C_1(-1,0)$ 到直线 l 的距离为 d，

则 $|AB|=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore d=1$. ……… 7 分

$|PD|=\sqrt{|PC_1|^2-1}$，

当 $|PC_1|$ 最小时，$|PD|$ 最小，因为 $|PC_1|$ 的最小值为圆心 C_1 到直线 C_2 的距离，

所以 $|PC_1|_{\min}=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，……… 9 分

所以 $|PD|_{\min}=\sqrt{\frac{25}{2}-1}=\frac{\sqrt{46}}{2}$. ………… 10 分

23.【解析】(1)$\because f(x)=\frac{1}{3}(x+1)^2\geqslant0$，……… 1 分

$\therefore f(x)+|f(x)-9|=|f(x)|+|f(x)-9|\geqslant|f(x)-f(x)+9|=9$，……………………… 4 分

所以 $M=9$. ………………………………… 5 分

(2)由(1)知，$(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2=27$.
………………………………………………… 6 分

因为 $[(a+1)+(b+1)+(c+1)]^2$

$=(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2+2(a+1)(b+1)+2(b+1)(c+1)+2(a+1)(c+1)$

$\leqslant3[(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2]=81$，… 9 分

所以 $(a+1)+(b+1)+(c+1)\leqslant9$，

故 $a+b+c\leqslant6$. ……………………………… 10 分

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”,即可获取《高考考前必背知识点》