

中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 3 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | (x+1)(x-1) < 0\}$, $B = \{y | y > 0\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$

- A. \emptyset B. $[0, 1)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-1, 0]$

2. 若复数 z 满足 $z(1+i) = 2i-1$ (i 为虚数单位), 则下列说法正确的是

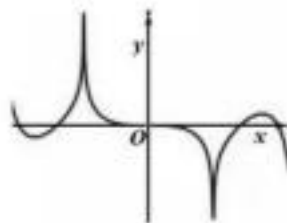
- A. z 的虚部为 $\frac{3}{2}i$ B. $|z| = \frac{\sqrt{10}}{2}$
C. $z + \bar{z} = 3$ D. z 在复平面内对应的点在第二象限

3. 设 $a > 0, b > 0$, 则 “ $9a+b \leq 4$ ” 是 “ $ab \leq \frac{4}{9}$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则该函数的解析式可能是

- A. $f(x) = \ln(1 + \cos x^2)$
B. $f(x) = x \cdot \ln(1 - \cos x^2)$
C. $f(x) = \ln(1 + \sin x^2)$
D. $f(x) = x \cdot \ln(1 - \sin x^2)$



(第 4 题图)

5. 为了得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象

- A. 向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位

- C. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位
D. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位
6. 已知 α, β, γ 是三个互不相同的锐角, 则在 $\sin \alpha + \cos \beta, \sin \beta + \cos \gamma, \sin \gamma + \cos \alpha$ 三个值中, 大于 $\sqrt{2}$ 的个数最多有 () 个
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过左焦点 F 作一条斜率为 $k (k > 0)$ 的直线, 与椭圆交于 A, B 两点, 满足 $|AF| = 2|FB|$, 则实数 k 的值为
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
8. 对任意的 $x_1, x_2 \in (1, 2]$, 当 $x_1 < x_2$ 时, $x_2 - x_1 + \frac{a}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是
A. $(2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(4, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

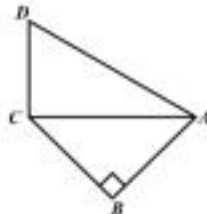
二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知两平行直线 $l_1: x - 2y - 2 = 0$ 与 $l_2: 2x - ay + 5 = 0$, 直线 l_1 与圆 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ ($r > 0$) 相切, 则下列说法正确的是
A. a 的值为 4 B. 两平行直线间的距离为 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$
C. r 的值为 $\sqrt{5}$ D. 直线 l_2 截圆所得的弦长为 $\frac{4\sqrt{30}}{5}$
10. 已知 $\left(ax + \frac{1}{x}\right)^6$ ($a > 0$) 的展开式中含 x^{-2} 的系数为 60, 则下列说法正确的是
A. $\left(ax + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的各项系数之和为 1
B. $\left(ax + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中系数最大的项为 $240x^2$
C. $\left(ax - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 -160

D. $\left(ax - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中所有二项式的系数和为 32

11. 如图所示, 已知四边形 $ABCD$ 是由一个等腰直角三角形 ABC 和一个有一内角为 30° 的直角三角形 ACD 拼接而成, 将 $\triangle ACD$ 绕 AC 边旋转的过程中, 下列结论中可能成立的是

- A. $CD \perp AB$
B. $BC \perp AD$
C. $BD \perp AB$
D. $BC \perp CD$



(第 11 题图)

12. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = \frac{a_n^2 + 1}{a_n} (n \in \mathbf{N}^+)$, 则下列说法不正确的是

- A. $a_{2021} \cdot a_{2022} < 1$
B. $a_{2021} \cdot a_{2022} > 1$
C. $a_{2022} < -2\sqrt{2022}$
D. $a_{2022} > 2\sqrt{2022}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线过点 $(2, 1)$, 则此双曲线的离心率为_____.

14. 平面向量 \vec{a}, \vec{b} 满足: $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = -3\vec{a} \cdot \vec{b}$, 设向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 θ , 则 $\sin \theta$ 的最大值为_____.

15. 已知实数 a, b 满足 $2^a + 2^{b+1} = 4^a + 4^b$, 则 $t = 2^a + 2^b$ 的取值范围是_____.

16. 电影院一排有八个座位, 甲、乙、丙、丁四位同学相约一起观影, 他们要求坐在同一排, 问恰有两个连续的空座位的情况有_____种.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 一个口袋里装有大小相同的 6 个球, 其中红球 3 个, 黄球 2 个, 蓝球 1 个, 现从中任意取出 4 个小球.

- (1) 求其中恰有 2 个小球颜色相同的概率;
(2) 设变量 X 为取出的四个小球中红球的个数, 求 X 的分布列、数学期望和方差.



18. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $b=2$, 且 $\cos C = \frac{a}{2} - \frac{c}{4}$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n (n \in \mathbf{N}^+)$.

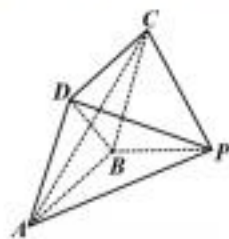
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \begin{cases} \frac{a_n \cdot (n-1) \cdot (n+1)}{2^n \cdot n}, & (n \geq 2) \\ a_n, & (n=1) \end{cases}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n \geq 3 - \lambda(n+2)$ 恒

成立, 求 λ 的取值范围.

20. (12分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, $PB=1$, $PB \perp AB$.

- (1) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PAC ;
- (2) 求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的大小.



(第20题图)

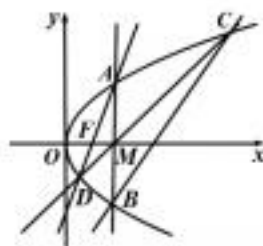
21. (12分) 已知实数 x, y 满足 $x^2 + (e^x - y)^2 + e^{2y} = 2$.

- (1) 若 $x=0$ 时, 试问上述关于 y 的方程有几个实根?
- (2) 证明: 使方程 $x^2 + (e^x - y)^2 + e^{2y} = 2$ 有解的必要条件为: $-2 \leq x \leq 0$.

22. (12分) 如图所示, 已知抛物线 $E: y^2 = 2px$, 其焦点与准线的距离为6,

过点 $M(4,0)$ 作直线 l_1, l_2 与 E 相交, 其中 l_1 与 E 交于 A, B 两点, l_2 与 E 交于 C, D 两点, 直线 AD 过 E 的焦点 F , 若 AD, BC 的斜率为 k_1, k_2 .

- (1) 求抛物线 E 的方程;
- (2) 问 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值? 如是, 请求出此定值; 如不是, 请说明理由.



(第22题图)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

