天祝一中 2022～2023 学年度第二学期第二次月考·高一数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 z 是纯虚数，所以 $\begin{cases} m(m-1)=0, \\ m\neq 0, \end{cases}$ 解得 $m=1$. 故选 A.

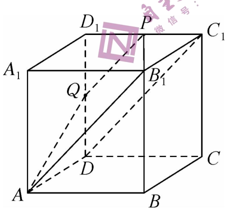
2. C　对于 A，由矩形绕着它的一条边旋转一周形成一个圆柱，可得圆柱的每个轴截面都是全等矩形，A 正确；对于 B，长方体是直四棱柱，直四棱柱不一定是长方体，B 正确；对于 C，用一个平行于底面的平面截圆锥，必得到一个圆锥和一个圆台，C 错误；对于 D，四棱柱、四棱台、五棱锥都是六面体，D 正确. 故选 C.

3. B　因为向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2-m,2+m)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $2+m=0$，即 $m=-2$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(0,1)-(4,0)=(-4,2)$. 故选 B.

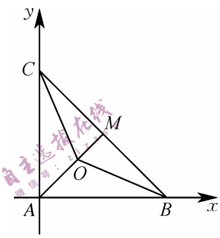
4. C　对于 A，直线 m 与平面 α 内的所有直线平行不可能，故 A 错误；对于 B，当直线 m 在平面 α 内时，满足直线 m 与平面 α 内的无数条直线平行，但 m 与 α 不平行，故 B 错误；对于 C，能推出 m 与 α 平行，故 C 正确；对于 D，当直线 m 在平面 α 内时，m 与 α 不平行，故 D 错误. 故选 C.

5. D　因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$. 故选 D.

6. D　如图所示，取 C_1D_1 的中点 P，连接 PQ、PB_1、AB_1、AQ 和 DC_1，∵ P，Q 分别是 C_1D_1，DD_1 的中点，∴ $PQ\parallel C_1D$，且 $PQ=\frac{1}{2}C_1D$，∵ $AB_1\parallel C_1D$，∴ $PQ\parallel AB_1$，∴四边形 AB_1PQ 是过 A，Q，B_1 三点的截面，且四边形 AB_1PQ 是梯形. 故选 D.



第 6 题图



第 8 题图

7. B　由题可得圆锥型高脚杯的体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{\pi R^3}{3}$，小铁球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$，由题可得 $\frac{1}{8}\times\frac{\pi R^3}{3}=\frac{4\pi r^3}{3}$，即 $\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$. 故选 B.

8. C　如图，以 A 为原点，AB，AC 所在直线分别为 x 轴，y 轴建立直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(\sqrt{2},0)$，$C(0,\sqrt{2})$，∵ M 是 BC 的中点，∴ $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，∵ O 是线段 AM 的中点，∴ $O\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，∴ $\overrightarrow{OB}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$，$\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，∴ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，∴ $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}$. 故选 C.

9. BC　对于 A，若 $a\parallel b$，$b\parallel c$，则 $a\parallel c$，所以 A 正确；对于 B，若 a 与 b 垂直，b 与 c 垂直，则 a 与 c 可能相交、平行或异面，所以 B 错误；对于 C，若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则 a 与 b 可能异面，也可能平行，所以 C 错误；对于 D，若 a，b 与 α 所成的角均为 $\frac{\pi}{2}$，则 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，可得 $a\parallel b$，所以 D 正确. 故选 BC.

10. BD　对于 A，$z=3\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=2+3\mathrm{i}$，虚部为 3，A 错误；对于 B，$2+\mathrm{i}+(2-\mathrm{i})=4$，$(2+\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})=5$，B 正确；对于 C，$z=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=-2\mathrm{i}$，复平面内 $\bar{z}$ 对应的点在 y 轴负半轴上，C 不正确；对于 D，复平面内，实轴上的点对应的复数是实数，D 正确. 故选 BD.

11. ABD　由 $a-b=2b\cos C$，可得 $\sin A-\sin B=2\sin B\cos C$，即 $\sin(B+C)-2\sin B\cos C=\sin B$，即有 $\sin C\cos B$

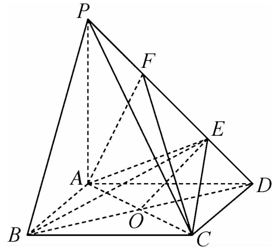
$-\cos C\sin B=\sin(C-B)=\sin B$，因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$C-B=B$，即$C=2B$，故 A 正确，C 错误；由$0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<2B<\frac{\pi}{2}$，且$A=\pi-B-C=\pi-3B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，解得$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，故 B 正确；而$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，故 D 正确. 故选 ABD.

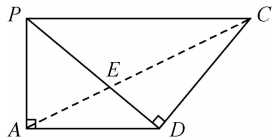
12. CD　对于 A，$\because PA\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp AC$，假如$AC\perp EF$，又$PA\cap EF=P$，$\therefore AC\perp$平面PAD，又$AD\subset$平面PAD，$\therefore AC\perp AD$，而四边形$ABCD$为正方形，与$AC\perp AD$矛盾，故$AC\perp EF$不正确，故 A 不正确；

对于 B，设$AC\cap BD=O$，连接OE，若$PB/\!/$平面AEC，又平面$PBD\cap$平面$AEC=OE$，则$PB/\!/OE$，在$\triangle PBD$中，因为O为BD的中点，则E必为PD的中点，这与E为线段PD上的动点矛盾，故 B 不正确；

对于 C，$\because E$为线段PD上的动点，$\therefore$二面角$E-BD-C$的大小即为二面角$P-BD-C$的大小，故二面角$E-BD-C$的大小为定值，故 C 正确；

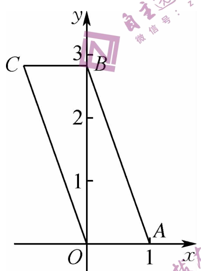
对于 D，如图，将侧面$\triangle PAD$和$\triangle PCD$展开在一个平面内，连接AC，当E处在AC与PD的交点处时，$AE+CE$取得最小值，此时，在$\triangle ACD$中，由余弦定理，得$AC^2=AD^2+CD^2-2\times AD\times CD\times\cos\angle ADC=1+1-2\times1\times1\times\cos 135^\circ=2+\sqrt{2}$，故$AE+CE$的最小值为$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，故 D 正确. 故选 CD.



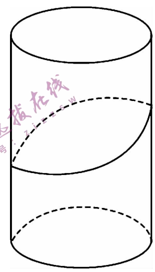


13. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　由$z\mathrm{i}+1=z$，得$z=\frac{-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{1}{1-\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$，则$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

14. $2\sqrt{3}$　作出该直观图的原图形，因为直观图中的线段$C'B'/\!/x'$轴，所以在原图形中对应的线段CB平行于x轴且长度不变，点C'和B'在原图形中对应的点C和B的纵坐标是$O'B'$的 2 倍，则$OB=2O'B'=2\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2}$，$BC=B'C'=1$，所以$A(1,0)$，$C(-1,2\sqrt{2})$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1-1)^2+(2\sqrt{2}-0)^2}=2\sqrt{3}$，故原图形较长的对角线长为$2\sqrt{3}$.



第 14 题图



第 15 题图

15. $1\ 500\pi$　将相同的两个几何体，对接为圆柱，则所求几何体的侧面积是新圆柱侧面积的一半，所求侧面积为$\frac{1}{2}\times2\pi\times15\times(40+60)=1\ 500\pi(\mathrm{cm}^2)$.

16. $\left(\frac{1}{2},2\right)$　由已知$b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$，由正弦定理得$bc+a^2=b^2+c^2$，所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，则$A=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$是锐角三角形，所以$\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}$，$C>\frac{\pi}{6}$，所以$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，$\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}\in\left(\frac{1}{2},2\right)$.

17. 解：(1)$z_1-z_2=a+(-2a-2)\mathrm{i}$. ………………………………………………………… 1 分

因为z_1-z_2在复平面内的对应点落在第二象限，所以$\begin{cases}a<0,\\-2a-2>0,\end{cases}$ …………………………… 3 分

解得$a<-1$.

因此，实数a的取值范围是$(-\infty,-1)$. ……………………………………………………… 4 分

(2)因为虚数z_1是方程$x^2-8x+m=0$的一个根，所以$\bar{z}_1$也是方程$x^2-8x+m=0$的一个根，……… 6 分

于是$z_1+\bar{z}_1=2(a+2)=8$，解得$a=2$. ……………………………………………………… 8 分

所以$z_1=4+\mathrm{i}$，$\bar{z}_1=4-\mathrm{i}$，因此$m=z_1\cdot\bar{z}_1=(4+\mathrm{i})(4-\mathrm{i})=17$. ……………………… 10 分

18. (1)解：由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=3$， …………………………………………………… 2 分

所以 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=1$. ………………………… 6 分

(2)证明：因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=1-1=0$，

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$. …………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\sin x=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos x=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. ……………… 2 分

因为 $\tan y=-\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{5\pi}{6}<y<\pi$，所以 $\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\cos y}=-\dfrac{1}{7},\\ \sin^2 y+\cos^2 y=1,\end{cases}$ 且 $\begin{cases}\sin y>0,\\ \cos y<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sin y=\dfrac{1}{5\sqrt{2}},\\ \cos y=-\dfrac{7}{5\sqrt{2}}.\end{cases}$ ……………… 4 分

所以 $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\times\left(-\dfrac{7}{5\sqrt{2}}\right)-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\times\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………… 6 分

(2)因为 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，

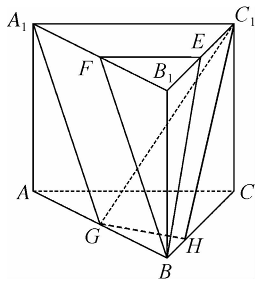
所以 $0<2x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin 2x=\sqrt{1-\cos^2 2x}=\dfrac{3}{5}$. ……………………………………………………… 8 分

因为 $\cos(2x-y)=\cos 2x\cos y+\sin 2x\sin y=\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{7}{5\sqrt{2}}\right)+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，……………… 10 分

由 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{6}<y<\pi$，得 $2x-y\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{3}\right)$，…………………………………………… 11 分

所以 $2x-y=-\dfrac{3\pi}{4}$. …………………………………………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：如图，



∵E，F 分别为 B_1C_1，A_1B_1 的中点，

∴$EF/\!/A_1C_1$， ……………………………………………………………………… 1 分

∵$A_1C_1\subset$平面 A_1C_1G，$EF\not\subset$平面 A_1C_1G，

∴$EF/\!/$平面 A_1C_1G， ……………………………………………………………… 2 分

又 F，G 分别为 A_1B_1，AB 的中点，

∴$A_1F=BG$， ………………………………………………………………………… 3 分

又 $A_1F/\!/BG$，∴四边形 A_1GBF 为平行四边形，则 $BF/\!/A_1G$， ……………… 4 分

∵$A_1G\subset$平面 A_1C_1G，$BF\not\subset$平面 A_1C_1G，

∴$BF/\!/$平面 A_1C_1G， ……………………………………………………………… 5 分

又 $EF\cap BF=F$，EF，$BF\subset$平面 BEF，

∴平面 $A_1C_1G/\!/$平面 BEF. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)解：在平面 ABC 内，过点 G 作 $GH\perp BC$，垂足为 H，连接 C_1H. …………………………… 7 分

∵正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，∴$CC_1\perp$平面 ABC. 又 $GH\subset$平面 ABC，∴$CC_1\perp GH$.

又 $BC\cap CC_1=C$，BC，$CC_1\subset$平面 BCC_1B_1，∴$GH\perp$平面 BCC_1B_1.

∴$\angle GC_1H$ 即为 C_1G 与平面 BCC_1B_1 所成的角. ………………………………………………… 8 分

∵正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长为 2，G 为 AB 中点，

∴$BG=1$，$\angle GBH=60°$，

又 $\angle BHG=90°$，∴$BH=\dfrac{1}{2}$，$GH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………………………… 9 分

易知 $CC_1\perp BC$，$CH=\dfrac{3}{2}$，

∴$C_1H=\sqrt{CH^2+CC_1^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2}=\dfrac{5}{2}$. ……………………………………………………… 10 分

易知 $GH\perp C_1H$，

∴$C_1G=\sqrt{GH^2+C_1H^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$， ………………………………………………… 11 分

$\sin\angle GC_1H=\dfrac{GH}{C_1G}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$,

故 C_1G 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)由 $AB=2\sqrt{3}$,$CD=\sqrt{3}$,$\angle ADC=\angle CAB=90^\circ$,$\angle DAC=60^\circ$,

可知 $AD=\dfrac{CD}{\tan 60^\circ}=1$, ………………………………………………………………………………… 2 分

在$\triangle ABD$ 中,$\angle DAB=150^\circ$,$AB=2\sqrt{3}$,$AD=1$,

由余弦定理可知,$BD^2=(2\sqrt{3})^2+1^2-2\times2\sqrt{3}\times1\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=19$,

则 $BD=\sqrt{19}$. ………………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)$\because\angle CAB=90^\circ$,$\therefore AC=AB\cdot\tan\angle ABC=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2$. ………………………………………… 7 分

由题意易知,$AD=2\cos\theta$,$\angle ABD=60^\circ-\theta$.

在$\triangle ABD$ 中,由正弦定理可知,$\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$, ……………………………………… 9 分

$\therefore\dfrac{2\cos\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}=4\sqrt{3}$,即有 $2\cos\theta=4\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$,

$\therefore 4\cos\theta=2\sqrt{3}\sin\theta$,

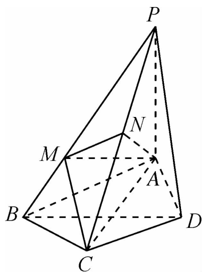
$\therefore\tan\theta=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

22. (1)证明:因为$\triangle ABD$ 为正三角形,所以 $AB=AD$,又 $BC=CD$,所以 $AC\perp BD$. ………………… 2 分

又 $PA\perp$底面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BD$. ……………………………………… 3 分

$AC\cap PA=A$,AC,$PA\subset$平面 PAC,所以 $BD\perp$平面 PAC,又 $PC\subset$平面 PAC,所以 $BD\perp PC$. ……… 5 分

(2)解:因为 $PA\perp$底面 $ABCD$,$BC\subset$平面 $ABCD$,



所以 $PA\perp BC$,又已知 $AB\perp BC$,$PA\cap AB=A$,PA,$AB\subset$平面 PAB,

所以 $BC\perp$平面 PAB,$PB\subset$平面 PAB,所以 $BC\perp PB$,

所以$\angle PBA$ 即为二面角 $P-BC-A$ 的平面角.

因二面角 $P-BC-A$ 的大小为 45°,所以$\angle PBA=45^\circ$. ……………………………… 6 分

由题意,可证$\triangle ABC\cong\triangle ADC$,

又$\triangle ABD$ 为等边三角形,

所以$\angle BAC=\angle DAC=30^\circ$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB=\dfrac{BC}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}$. ………………………………………………………………… 7 分

因为 $PA\perp$底面 $ABCD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,

所以 $PA\perp AB$. 知 $PA=AB=\sqrt{3}$,$PB=\sqrt{6}$,所以$\triangle PBC$ 的面积 $S_{\triangle PBC}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………… 8 分

因为 $PB=3MB$,所以 $S_{\triangle PMC}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle PBC}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

又因为 N 为 PC 中点,所以 $S_{\triangle CMN}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle PMC}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ……………………………………………… 9 分

设点 A 到平面 PBC 的距离为 h,由 $V_{P\text{-}ABC}=V_{A\text{-}PBC}$,得$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times1\times h$,

解得 $h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,即点 A 到平面 CMN 的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

又 $S_{\triangle CMN}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,所以三棱锥 $C-AMN$ 的体积 $V_{C\text{-}AMN}=V_{A\text{-}CMN}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{1}{6}$. ……………… 12 分