名校联考联合体2023年春季高二期末联考
暨新高三适应性联合考试

数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $M=\{x\mid -x^2+x+6\geqslant 0\}$，$N=\{x\mid y=\sqrt{\ln x-1}\}$，则 $M\cap N=$

A. $[-2,e]$　B. $(-2,3)$　C. $[e,3]$　D. $[e,+\infty)$

2. 已知复数 $z=1+i$，且 $\bar{z}+xz+y=0$，其中 x,y 为实数，则

A. $x=1,y=-2$　B. $x=-1,y=-2$

C. $x=1,y=2$　D. $x=-1,y=2$

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 满足 $|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}|=2$，则 $\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=$

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

4. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形，$AA_1=4$，M,N 分别为 AA_1，CC_1 的中点，则三棱锥 $M-NB_1D_1$ 的体积为

A. $\frac{4}{3}$　B. 4　C. $\frac{8}{3}$　D. 6

5. 某学校在高考模拟考试座位的排定过程中，有来自 A 班的4名学生和来自 B 班的4名学生，恰好排在五行八座（每个考室5行 * 8座 $=40$ 人）中的第二行，则来自同一班级的4名学生互不相邻的概率为

A. $\frac{1}{30}$　B. $\frac{1}{35}$　C. $\frac{3}{35}$　D. $\frac{1}{10}$

6. 已知 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，且 $y=|f(x)|$ 的最小正周期为2．若存在 $m>0$，使得对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+m)=mf(-x)$，则 φ 为

A. $-\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $-\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{3}$

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^{2x}-1}{2^x}$，$g(x)=xf(x)$，若 $a=g(\ln 3)$，$b=g(0.5^{\frac{1}{3}})$，$c=g\left(-\dfrac{3}{2}\right)$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $b<a<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<b<c$

8. 已知 A,B,C,D 是表面积为 20π 的球面上四点，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，三棱锥 $A-BCD$ 的体积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则线段 CD 长度的取值范围为

A. $[3\sqrt{2},2\sqrt{5}]$　　B. $[\sqrt{10},2\sqrt{3}]$　　C. $[\sqrt{10},3\sqrt{2}]$　　D. $[2\sqrt{3},2\sqrt{5}]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知函数 $f(x)=x^3-12x+t(t\in\mathbf{R})$，则下列结论中正确的是

A. $f(x)$可能是奇函数　　B. $f(x)$在区间$[-2,2]$上单调递减

C. 当 $f(x)$的极大值为 17 时，$t=1$　　D. 当 $t=1$ 时，函数 $f(x)$的值域是$[-15,17]$

10. 已知抛物线 $C:y=2px^2$ 的焦点 F 到准线 l 的距离为 2，则

A. 抛物线为 $y=4x^2$

B. 若 $A(2,3)$，M 为 C 上的动点，则$|MA|+|MF|$的最小值为 4

C. 直线 $y=kx+1$ 与抛物线 C 相交所得弦长最短为 4

D. 若抛物线准线与 y 轴交于点 N，点 M 是抛物线上不同于其顶点的任意一点，$t|MN|=|MF|$，$t\in\mathbf{R}$，则 t 的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则以下结论正确的是

A. 若 P 为线段 B_1D_1 上动点（包括端点），则点 P 到平面 A_1BD 的距离为定值

B. 正方形底面 $ABCD$ 内存在点 P，使得 $D_1P\perp AD_1$

C. 若点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上运动，点 Q 是 CD 的中点，点 P 满足 $PQ\perp AC_1$，则点 P 的轨迹的周长为 $6\sqrt{2}$

D. 当点 P 为 B_1D_1 中点时，三棱锥 $P-A_1BD$ 的外接球半径 $R=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

12. 已知定义在$(0,+\infty)$的函数 $f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^2-4x-2e^x+5}+\sqrt{e^{2x}+x^2+2ex-2e^{x+1}+2e^2}$存在 $x_0\in\left(\dfrac{k}{4},\dfrac{k+2}{4}\right)$使 $f(x_0)$为函数 $y=f(x)$的最小值，其中 $k\in\mathbf{N}$，则 k 的值可以为

（附：$e^{\frac{1}{2}}\approx1.65$，$e\approx2.72$，$e^3\approx20$）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

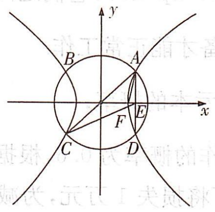
三、填空题；本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 在$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(\sqrt{x}-1)^6$ 的展开式中常数项等于________.

14. 若一直线与曲线 $y=\ln x$ 和曲线 $x^2=2py(p>0)$相切于同一点 M，则 p 的值为________.

15. 有穷等差数列$\{a_n\}$的各项均为正数，若 $a_{2023}=3$，则$\dfrac{2}{a_{2000}}+\dfrac{1}{2a_{2046}}$的最小值是________.

16. 如图，已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与过其焦点的圆 $x^2+y^2=c^2$ 相交于 A,B,C,D 四个点，直线 AD 与 x 轴交于点 E，直线 CE 与双曲线 C_1 交于点 F，记直线 AC,AF 的斜率分别为 k_1,k_2，若 $k_1\cdot k_2=3$，则双曲线 C_1 的离心率为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n+n+2$.

（1）证明 $\left\{\frac{a_n+1}{n}\right\}$ 是等比数列；

（2）若 $b_n=\log_2\frac{a_n+1}{n}$，求数列 $\left\{\frac{1}{b_{2n}b_{2n+2}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（12 分）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<0)$ 在一个周期内一系列对应的值如下表：

x	…	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11}{12}\pi$	…
$f(x)$	…	-2	0	2	$\sqrt{3}$	0	-2	…

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）若在锐角 $\triangle ABC$ 中，$f(A)=\sqrt{3}$，角 A 所对的边 $a=\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19.(12 分)一个小型制冰厂有 3 台同一型号的制冰设备,在一天内这 3 台设备只要有一台能正常工作,制冰厂就会有利润,当 3 台都无法正常工作时制冰厂就因停业而亏本(3 台设备相互独立,3 台都正常工作时利润最大). 每台制冰设备的核心系统由 3 个同一型号的电子元件组成,3 个元件能正常工作的概率都为 $p(0<p<1)$,它们之间相互不影响,当系统中有不少于$\frac{2}{3}$的电子元件正常工作时,此台制冰设备才能正常工作.

(1)当 $p=\frac{1}{2}$时,求一天内制冰厂不亏本的概率;

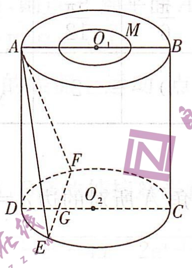
(2)若已知当前每台设备能正常工作的概率为 0.6,根据以往经验可知,若制冰厂由于设备不能正常工作而停业一天,制冰厂将损失 1 万元,为减少经济损失,有以下两种方案可供选择参考:

方案 1:更换 3 台设备的部分零件,使每台设备能正常工作的概率为 0.85,更新费用共为 600 元.

方案 2:对设备进行维护,使每台设备能正常工作的概率为 0.75,设备维护总费用为 a 元.

请从期望损失最小的角度判断如何决策?

20.(12 分)如图,圆柱的轴截面 $ABCD$ 是边长 $DC=4$,$AD=3$ 的矩形,点 M 在上底面圆 O_1 内,且 $O_1M=1$(A,B,M 三点不在一条直线上). 下底面圆 O_2 的一条弦 EF 交 CD 于点 G,其中 $DE=DF=2$,平面 $AEF\cap$平面 $ABM=l$.



(1)证明:$l\perp$平面 $ABCD$;

(2)若二面角 $M\text{-}EF\text{-}A$ 的正切值为$\frac{3}{4}$,求 DM 的长.

21.(12 分)已知 $g(x)=\frac{mx}{e^x}+\sin x$,且 $y=g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $y=2x-3$ 平行.

(1)求 m 的值,并求此切线方程;

(2)若 $f(x)=g(x)-\sin x$,且 $f(x)=a$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,求证:$x_2-x_1>2-2ae$.

22.(12 分)已知直线 l_1 过点 $F_1(-\sqrt{2},0)$且与圆 F_2:$(x-\sqrt{2})^2+y^2=32$ 交于 B,C 两点,过 F_1C 的中点 D 作垂直于 BC 的直线交 F_2C 于点 P,记 P 的轨迹为曲线 Γ.

(1)求曲线 Γ 的方程;

(2)设曲线 Γ 与 x 轴的交点分别为 A_1,A_2,点 F_1,F_2 关于直线 $y=-x$ 的对称点分别为 E,F,过点 F_2 的直线 l_2 与曲线 Γ 交于 M,N 两点,直线 A_1M,A_2N 相交于点 Q. 请判断 $\triangle QEF$ 的面积是否为定值? 若是,求出这个值;若不是,请说明理由.