高三考试数学试卷参考答案

1. B 因为 $A\cup B=\{-1,3,4,7\}$，所以 $(A\cup B)\cap C=\{-1,3,4\}$.

2. A 存在量词命题的否定是全称量词命题.

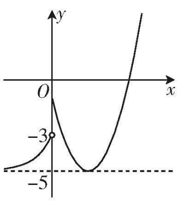
3. D 由题意可得 $z=\frac{4+i}{1+3i}=\frac{(4+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i+i-3i^2}{1-9i^2}=\frac{7}{10}-\frac{11}{10}i$.

4. C 因为 $f(-x)=\frac{2(-x)\sin(-x)}{(-x)^2+1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故而排除 A，B；因为当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)=\frac{2x\sin x}{x^2+1}\leqslant\frac{2x\sin x}{2x}=\sin x\leqslant 1$，所以 $f(x)<1$，故选 C.

5. B $y'=3t^2+6t-1$，因为当 $t=t_0$ 时，该质点的瞬时速度大于 8 m/s，所以 $3t_0^2+6t_0-1>8$，显然 t_0 不是负数，所以 $t_0>1$.

6. A 因为 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 因为 A，P，D 三点共线，所以 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{AC}$. 因为 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 因为 E 是边 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 因为 E，P，F 三点共线，所以 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AE}+(1-k)\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{AB}+\frac{1-k}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\begin{cases}\frac{2}{3}\lambda=\frac{1}{2}k,\\ \frac{1}{3}\lambda=\frac{1-k}{3},\end{cases}$ 解得 $k=\frac{4}{7}$，从而 $m=\frac{2}{7}$，$n=\frac{1}{7}$，故 $m+n=\frac{3}{7}$.

7. B 由 $f(x)=0$，得 $a=\begin{cases}2\times 3^x-5,x<0,\\ x^2-4x-1,x\geqslant 0,\end{cases}$ 作出函数 $g(x)=\begin{cases}2\times 3^x-5,x<0,\\ x^2-4x-1,x\geqslant 0\end{cases}$ 的图象，如图所示. 由图可知，当 $a\in(-5,-3)$ 时，直线 $y=a$ 与 $g(x)$ 的图象有 3 个交点.



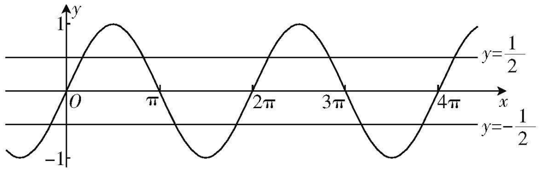
因为 $x^2-4x-a>0$ 对 $x\geqslant 0$ 恒成立，所以 $(x-2)^2-4>a$ 对 $x\geqslant 0$ 恒成立，所以 $a<-4$.
故当 $f(x)$ 有 3 个零点时，$a\in(-5,-4)$. 所以“$-5<a<-3$”是“$f(x)$ 有 3 个零点”的必要不充分条件.

8. D 由 $|f(x_0)|=1$，得 $\sin(\omega x_0-\frac{\pi}{3})=\pm\frac{1}{2}$，

因为 $x\in(0,\pi)$，$\omega>0$，所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3})$，

依题意可得，$\frac{19\pi}{6}<\omega\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{23\pi}{6}$，解得 $\omega\in(\frac{7}{2},\frac{25}{6}]$.

1
官方微信公众号：zizzsw
官方网站：www.zizzs.com
咨询热线：010-5601 9830
微信客服：zizzs2018



9. AC　$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(-2,3)$，A 正确. 因为 $OA\perp OC$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=m+8=0$，则 $m=-8$，所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-9,2)$，B 错误. 因为$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}=(5,-3)$，所以$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$，C 正确. $\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OC}$上的投影向量为$\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}\cdot\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{16+12}{(-8)^2+4^2}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{7}{20}\overrightarrow{OC}$，D 错误.

10. ABD　令 $x=y=0$，得 $f(0)=[f(0)]^2-2f(0)+2$，因为 $f(0)<2$，所以 $f(0)=1$. 令 $x=y=1$，得 $f(1)=[f(1)]^2-2f(1)+2$，因为 $f(0)\neq f(1)$，所以 $f(1)=2$. 令 $x=y=-1$，得$f(1)=[f(-1)]^2-2f(-1)+2$，即$[f(-1)]^2=2f(-1)$，因为 $f(x)>0$，所以 $f(-1)>0$，所以 $f(-1)=2$. 令 $y=-1$，得 $f(-x)=f(-1)f(x)-f(-1)-f(x)+2$，则 $f(-x)=2f(x)-2-f(x)+2$，即 $f(-x)=f(x)$.

11. BCD　当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x+\varphi)$，则 $m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，所以 B 正确.

当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}+\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2})$对称，所以 A 错误. 当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$m=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，此时 $a^2+m^2=1$，所以 C 正确. 当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，将曲线 $y=\frac{1}{2}+\sin(2x-\frac{\pi}{6})$向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到曲线 $y=\frac{1}{2}+\sin(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})$，因为 $\sin(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，所以 D 正确.

12. ABD　因为 $c^2+ab=c+abc$，所以 $c(c-ab)-(c-ab)=0$，即$(c-ab)(c-1)=0$，因为 $c>1$，所以 $c=ab>1$，则$|a|+|b|\geqslant 2\sqrt{|ab|}>2$，所以$|a|+|b|>2$，A 正确. 若 $c=a+b>1$，则 $ab=a+b$，且 a,b 均为正数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $3a+4b=(3a+4b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{3a}{b}+\frac{4b}{a}+7\geqslant 2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}+7=7+4\sqrt{3}$，当且仅当$\frac{3a}{b}=\frac{4b}{a}$，即 $a=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$，$b=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$时，等号成立，则 $3a+4b$ 的最小值为 $7+4\sqrt{3}$，B 正确. 因为 $c=ab>1$，所以 $\log_2|a|+\log_2|b|-\log_2(1+c^2)=\log_2\frac{|ab|}{1+c^2}=\log_2\frac{c}{1+c^2}=\log_2\frac{1}{\frac{1}{c}+c}$，因为 $c>1$，所以$\frac{1}{c}+c>2$，所以 $\log_2|a|+\log_2|b|-\log_2(1+c^2)<\log_2\frac{1}{2}=-1$，C 错误. 由 $4c^2-a^4-b^4=6$，得 $4c^2=a^4+b^4+6\geqslant 2\sqrt{a^4b^4}+6=$

$2a^2b^2+6=2c^2+6$,则 $c^2\geqslant3$,由 $c>1$,得 $c\geqslant\sqrt{3}$,则 c 的最小值为$\sqrt{3}$,D 正确.

13. $\frac{\pi}{2}$　因为 $r=\frac{l}{|\alpha|}=3$,所以该扇形的面积为$\frac{1}{2}lr=\frac{\pi}{2}$.

14. -4;5 或 50　因为 $f(x)=x+\frac{2}{x}+1$,所以 $f(-x)=-x-\frac{2}{x}+1$,所以 $f(x)+f(-x)=2$,所以 $f(\lg\frac{1}{m})=f(-\lg m)=2-6=-4$.由 $f(x)=x+\frac{2}{x}+1=4$,解得 $x=1$ 或 2,所以 $\lg 2+\lg n=\lg(2n)=1$ 或 2,所以 $2n=10$ 或 100,所以 n 的值为 5 或 50.

15. $\frac{3}{5}$　由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{2}{5}(a^2+b^2)}{2ab}=\frac{\frac{3}{5}(a^2+b^2)}{2ab}\geqslant\frac{\frac{3}{5}\times2ab}{2ab}=\frac{3}{5}$.

16. 14　由 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<10x$,得$[f(x)g(x)]'<(5x^2)'$.
设函数 $h(x)=f(x)g(x)-5x^2$,则 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-10x<0$,
所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以 $h(1)>h(2)$,即 $f(1)g(1)-5\times1^2>f(2)g(2)-5\times2^2$,则 $f(2)g(2)-f(1)g(1)<15$.因为 $f(2)g(2)-f(1)g(1)$为整数,所以 $f(2)g(2)-f(1)g(1)$的可能取值的最大值为 14.

17. 解:$\angle CBD=180^\circ-\angle BCD-\angle BDC=55^\circ$,……1 分
在$\triangle BCD$ 中,由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$,……4 分
则 $BD=\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\frac{116\times\sin 30^\circ}{\sin 55^\circ}=\frac{58}{0.82}\approx70.73$ m.……7 分
在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AB\perp BD$,$\angle ADB=45^\circ$,……8 分
所以 $AB=BD\tan\angle ADB=BD\approx70.73$ m,
故黄河楼的实际高度约为 70.7 m.……10 分

18. (1)解:$f'(x)=6x^2-a$,……1 分
则 $f'(1)=6-a$.……2 分
又 $f(1)=9-a$,所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-(9-a)=(6-a)(x-1)$,
即 $y=(6-a)x+3$.……4 分
(2)证明:令 $x=0$,得 $y=3$,……5 分
所以(1)中的切线经过定点,且定点的坐标为$(0,3)$.……6 分
(3)解:因为 $f'(x)=6x^2-a$ 在$(1,+\infty)$上单调递增,……7 分
所以 $f'(1)=6-a<0$,……9 分
解得 $a>6$,即 a 的取值范围为$(6,+\infty)$.……10 分
当 $1<x<\sqrt{\frac{a}{6}}$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>\sqrt{\frac{a}{6}}$ 时,$f'(x)>0$.……11 分
所以 $f(x)$在 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$ 处取得极小值,即 $f(x)$在$(1,+\infty)$上有极小值.……12 分

19. 解:(1)由题意可得 $f(x)$的最小正周期 $T=\pi$,则 $\omega=2$.……2 分

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $A(\frac{\pi}{3},-2)$，所以 $f(\frac{\pi}{3})=2\cos(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi)=-2$，

所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k_1\pi+\pi(k_1\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{3}(k_1\in\mathbf{Z})$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………… 4 分

令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$. ……………………………… 6 分

(2)因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$，所以 $\cos(2x+\frac{\pi}{3})\in[-1,\frac{1}{2}]$，则 $f(x)\in$ $[-2,1]$. …………………………………………………………………………………… 8 分

因为 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$|f(x)-m|\leqslant 2$，所以 $m-2\leqslant f(x)\leqslant m+2$，………………………… 9 分

所以 $\begin{cases}m-2\leqslant -2,\\ m+2\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m\leqslant 0$. ………………………………………………… 11 分

故 m 的取值范围为 $[-1,0]$. ……………………………………………………………… 12 分

20. 解：$p(\alpha)=\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha$. ………………………………………………………… 2 分

(1)由 $p(\alpha)=2$，得 $\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=2$，……………………………… 4 分

解得 $\tan\alpha=1$ 或 2，…………………………………………………………………… 5 分

所以 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=0$ 或 $\frac{1}{3}$. ……………………………………………… 7 分

(2)由 $x^4+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{81}=\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{27}x$，得 $(x-\frac{1}{3})^4=0$， ………………………………… 9 分

则 $x=\frac{1}{3}$，即 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，……………………………………………… 11 分

所以 $p(\alpha)=\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1-6\sqrt{2}}{9}$. ……………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $a=-1$，所以 $f(x)=2^{1-x}-x$，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为减函数，…………… 2 分

因为 $f(-1)=2^2+1=5$，$f(1)=1-1=0$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的值域为 $[0,5]$. …… 4 分

(2)由 $f(f(x))-x=0$，得 $2^{1+af(x)}-f(x)-x=0$，

则 $2^{1+af(x)}-(2^{1+ax}-x)-x=0$，则 $2^{1+af(x)}=2^{1+ax}$，所以 $1+af(x)=1+ax$，…………… 5 分

因为 $a\neq 0$，所以 $2^{1+ax}-x=x$，…………………………………………………………… 6 分

所以 $a=\frac{\ln x}{x\ln 2}$. …………………………………………………………………………… 7 分

令函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x\ln 2}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2\ln 2}$. ………………………………………………… 8 分

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$. ………………………………… 9 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减. ………………………………… 10 分

当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g(x)>0$. ………………………………………………… 11 分

故 a 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2})$. …………………………………………………………………… 12 分

22.(1)解：$f'(x)=a+1+\ln x$，……………………………………………………………………………… 1 分

由 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}^{-a-1}$.

当 $0<x<\mathrm{e}^{-a-1}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\mathrm{e}^{-a-1}$ 时，$f'(x)>0$. ………………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{-a-1})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e}^{-a-1},+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 3 分

故 $y=f(-x)$ 在 $(-\infty,-\mathrm{e}^{-a-1})$ 上单调递减，在 $(-\mathrm{e}^{-a-1},0)$ 上单调递增. …………… 4 分

(2)证明：因为 $\forall x\in(1,+\infty)$，$\ln x>0$，所以要证 $\forall x\in(1,+\infty)$，$2\ln x f(\ln x)<x$，

只需证 $\forall x\in(0,+\infty)$，$2xf(x)<\mathrm{e}^x$，……………………………………………………………… 5 分

即证 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^3}$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

令函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g'(x)<0$.

…… 7 分

所以 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. …………………………………………………………………………… 8 分

令函数 $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^3}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{(x-3)\mathrm{e}^x}{2x^4}$. 当 $0<x<3$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>3$ 时，

$h'(x)>0$. ……………………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $h(x)_{\min}=h(3)=\dfrac{\mathrm{e}^3}{54}$. ………………………………………………………………………… 10 分

因为 $\mathrm{e}^4>54$，所以 $\dfrac{\mathrm{e}^3}{54}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\dfrac{\mathrm{e}^4-54}{54\mathrm{e}}>0$，所以 $g(x)_{\max}<h(x)_{\min}$，…………………… 11 分

所以 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^3}$，从而 $2xf(x)<\mathrm{e}^x$ 得证，故 $\forall x\in(1,+\infty)$，$2\ln x f(\ln x)<x$. ……… 12 分

5
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。