重庆市高2024届高三第二次质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题：本题共8小题．每小题5分，共40分．

1－4 ABCC　　5－8 DBAC

6. B 【解析】$n\geqslant 2$时，$a_n-a_{n-1}=8n$，$a_{n-1}-a_{n-2}=8(n-1)$，$\cdots$，$a_2-a_1=16$，将上式累加，得$a_n-a_1=\dfrac{(16+8n)(n-1)}{2}=(4n+8)(n-1)$，解得$a_n=4n^2+4n(n\geqslant 2)$（对于$n=1$同样成立），故$b_n=(2n+1)\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$．令$\begin{cases}b_k\geqslant b_{k-1}\\ b_k\geqslant b_{k+1}\end{cases}$，解得$\dfrac{17}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{19}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故$k=9$，即第九项最大．

7. A 【解析】$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)$，当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{12}\right)$时，$2x+\dfrac{\pi}{6}+\varphi\in\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2},\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)$．由题目可知，$\exists k\in\mathbf{Z}$使得$\begin{cases}\varphi-\dfrac{\pi}{2}\geqslant-\pi+2k\pi\\ \varphi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi\end{cases}$，令$k=0$，得$\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right]$．

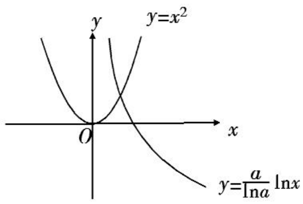
8. C 【解析】不妨令半径为1，$\angle BAC=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$．令$f(\theta)=S_{\triangle ABC}+S_{\text{四边形}DAFE}=\dfrac{1}{2}(\theta+\sin 2\theta+\sin(\pi-4\theta))=\dfrac{1}{2}(\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta)$，$f'(\theta)=\dfrac{1}{2}(1+2\cos 2\theta+4\cos 4\theta)=\dfrac{1}{2}(8\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta-3)=\dfrac{1}{2}(4\cos 2\theta+3)(2\cos 2\theta-1)$，令$f'(\theta)>0$，解得$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$．故$f(\theta)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$上单调递减．故$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，种植面积最大．

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．全部选对得5分，部分选对得2分，有选错得0分．

9. BD　　10. ABD　　11. BC　　12. ACD

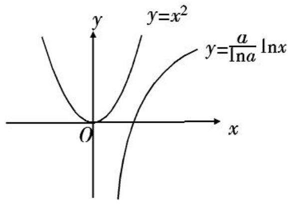
11. BC 【解析】$f(x)=\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{\ln x}{\ln a}=\dfrac{1}{a}\left(x^2-\dfrac{a}{\ln a}\ln x\right)$，对于$a$的值分$0<a<1$，$a>1$两种情况进行讨论：

①当$0<a<1$时，作$y=x^2$与$y=\dfrac{a}{\ln a}\ln x$的图像如下：



由图可知，只有一个交点即函数只有一个零点，又当$a>1$时两图像相切时也只有一个零点，故D错误．

②$a>1$ 时,作图像如下:



考虑两个函数刚好相切时, $a=a_0$.

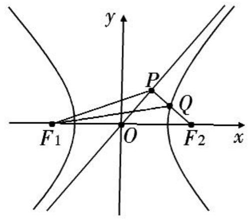
设两个函数切于(x_0,y_0),有$\begin{cases}x_0^2=\dfrac{a_0}{\ln a_0}\ln x_0\\ 2x_0=\dfrac{a_0}{x_0\ln a_0}\end{cases}$,解得$\dfrac{a_0}{\ln a_0}=2e$.

A. 当 $a=2$ 时, $f'(x)=x-\dfrac{1}{x\ln 2}$,故$f'(1)=1-\dfrac{1}{\ln 2}$,错误.

B. 当 $a=2$ 时, $\dfrac{2}{\ln 2}<2e$,此时 $y=x^2$ 恒在 $y=\dfrac{a}{\ln a}\ln x$ 上方,正确.

C. 当$\dfrac{a}{\ln a}>2e$ 时,$y=x^2$ 与 $y=\dfrac{a}{\ln a}\ln x$ 恒有两个交点,正确.

12. ACD 【解析】由题可知,$|PF_2|=2$,$|OP|=a$,$|OF_1|=c$,$\sin\angle POF_2=\dfrac{2}{c}$,



$\cos\angle POF_2=\dfrac{a}{c}$. 在 $\triangle POF_1$ 中,由正弦定理可知,$\dfrac{OP}{\sin\angle PF_1O}=\dfrac{OF_1}{\sin\angle F_1PO}$,即$\dfrac{a}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\angle POF_1\right)}=\dfrac{c}{\dfrac{1}{2}}$,即$\dfrac{a}{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{a}{c}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{c}}=\dfrac{c}{\dfrac{1}{2}}$,解得

$a=\sqrt{3}$,$c=\sqrt{7}$,$\sin\angle PF_1F_2=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{a}{c}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{c}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

故 A、C 正确,B 错误.

在$\triangle QF_1F_2$ 中,由余弦定理可知,$\cos\angle QF_2F_1=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{(2\sqrt{7})^2+(|QF_2|)^2-(|QF_2|+2\sqrt{3})^2}{2|QF_2|2\sqrt{7}}$,

解得$|QF_2|=8-4\sqrt{3}$,故 $S_{\triangle QOF_2}=\dfrac{1}{2}|QF_2||OF_2|\sin\angle QF_2O=\dfrac{1}{2}\times(8-4\sqrt{3})\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=4\sqrt{3}-6$,D 正确.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 15　　14. 1.6　　15. $a\leqslant-\dfrac{3}{16}$　　16. $\dfrac{\pi}{12}$　　$\left[1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$

15. $a\leqslant -\dfrac{3}{16}$

令 $k=\dfrac{1-\cos x}{2+\sin x}$,则 $k\sin x+\cos x=1-2k$,故 $|1-2k|\leqslant\sqrt{1+k^2}$,解得 $0\leqslant k\leqslant\dfrac{4}{3}$. 由题可知,$\forall x_1\geqslant 1$,

$f(x_1)\leqslant g(x)_{\max}=\dfrac{4}{3}$,即对 $\forall x_1\geqslant 1$,$a\leqslant\dfrac{\frac{4}{3}-x}{x^2}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{1}{x}$.

令 $h(x)=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{1}{x}\left(0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1\right)$,则 $a\leqslant h(x)_{\min}=-\dfrac{3}{16}$.

16. $\dfrac{\pi}{12}$ $\quad\left[1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$

设函数周期为 T,则 $\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}$,解得 $T=\pi$,$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$. 由图可知,$x=-\dfrac{\pi}{24}$是函数的一个零点,

则 $2\times\left(-\dfrac{\pi}{24}\right)+\varphi=k\pi$,即 $\varphi=\dfrac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,则 $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$. 故 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$.

当对称轴不在 $\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right],t\in\mathbf{R}$ 上时,函数 $f(x)$ 在 $\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right],t\in\mathbf{R}$ 上单调,不妨设函数 $f(x)$ 在 $\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right],t\in\mathbf{R}$ 上单调递增,设函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 在区间 $\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right],t\in\mathbf{R}$ 上的最大值与最小值之差为 $g(t)$,则 $g(t)=f(t)-f\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{12}\right)-\sin\left[2\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{12}\right]=\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{12}\right)+\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{2}$

当对称轴在区间 $\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right],t\in\mathbf{R}$ 上时,不妨设对称轴上取得最大值 1,则函数 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)$或 $f(t)$,显然当对称轴经过区间 $\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right],t\in\mathbf{R}$ 中点时,$g(t)$ 有最小值,

不妨设 $2\times\dfrac{\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+t}{2}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,则 $t=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

$f(t)=\sin\left[2\left(\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right)+\dfrac{\pi}{12}\right]=\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore$ $g(t)$ 的最小值为 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

综上,函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 在区间 $\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right],t\in\mathbf{R}$ 上的最大值与最小值之差的取值范围是 $\left[1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$

四、解答题:本题共6小题,共70分.

17. 解:(1)$S_n=2a_n+n-3$,$S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-1)-3$,$(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}+1$,$\therefore a_n=2a_{n-1}-1$,$(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$

$\therefore a_n-1=2(a_{n-1}-1)$,$(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,$a_1=S_1=2a_1-2$,可得 $a_1=2$

所以数列$\{a_n-1\}$是一个首项为1,公比为2的一个等比数列 …………………………… 4分

(2)由(1)可知 $a_n=2^{n-1}+1$,$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}+1}<\dfrac{1}{2^{n-1}}$ …………………………… 6分

所以原式$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$

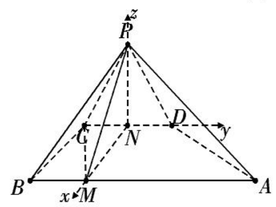
又因为$\dfrac{1}{2^{n-1}}>0$恒成立,所以$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$ …………………………… 10分

18. 解:取 CD 中点 N,连接 MN,PN.

$\because \angle ABC=\angle BCD=90°$,$\therefore AB/\!/CD$,又$\because AB=2CD$,$AB=4BM$,$\therefore CN=BM$,

$\therefore$ 四边形 $BMNC$ 是平行四边形,$\therefore CD\perp MN$,又$\because$ $\triangle PCD$ 为等边三角形且 N 为 CD 中点. $\therefore PN\perp CD$

在平面 PNM 中,$PN\cap NM=N$,$\therefore CD\perp$面 PMN,$PM\subset$面 PMN,$\therefore CD\perp PM$ …………………… 5分



(2)法一:$\because$ 面 $PCD\perp$ 面 $ABCD$,且面 $PCD\cap$ 面 $ABCD=CD$,$PN\perp CD$,

$\therefore PN\perp$平面 $ABCD$,$\therefore NM$,ND,NP 两两垂直,设 $CD=2$,连接 CM、NM,

以 CD中点 N 为坐标原点,NM、ND、NP 分别为 x、y、z 轴,建立如图所示空间直角坐标系,则 $N(0,0,0)$,$C(0,-1,0)$,$M(2,0,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{CP}=(0,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{MP}=(-2,0,\sqrt{3})$,

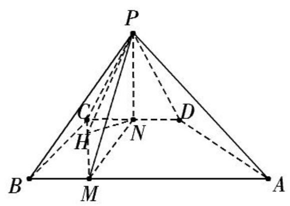
设平面 PCM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$

所以$\begin{cases}\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0\\ -2x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$,取 $\vec{n}=(\sqrt{3},-2\sqrt{3},2)$,

设二面角 $P-CM-A$ 的平面角为 α,

则$|\cos\alpha|=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{2}{1\times\sqrt{19}}=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$,由图易知:二面角 $P-CM-A$ 为锐角,所以二面角 $P-CM-A$的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. …………………………… 12分



法二:由(1)知,$\because$ 面 $PCD\perp$ 面 $ABCD$,且面 $PCD\cap$ 面 $ABCD=CD$,

又$\because PN\perp CD$,$\therefore PN\perp$平面 $ABCD$,设 $CD=2$,

如图,连接 CM、NM,作 $NH\perp CM$ 于 H,连接 PH,

则$\angle PHN$ 即为二面角 $P-CM-A$ 的平面角,

$\because NH=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,$PN=\sqrt{3}$,$\tan\angle PHN=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$,

$\therefore \cos\angle PHN=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. …………………………… 12分

19. 解:(1)记"在一道题中,甲得1分"为事件 A

$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

记"在第二道题结束时,甲乙比分为2:0"为事件 B

$P(B)=C_2^2\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$ ……………………………………………… 5分

(2) X 可能为:2,3,4

$P(X=2)=\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$, $P(X=3)=C_2^1\frac{3}{8}\times\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{177}{512}$,

$P(X=4)=C_3^2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^2+C_3^1\frac{5}{8}\times\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{135}{512}$

所以 X 的分布列

X	2	3	4
P	$\frac{200}{512}$	$\frac{177}{512}$	$\frac{135}{512}$

……………………………………………………………………………………… 10分

$\therefore E(X)=\frac{200}{512}\times2+\frac{177}{512}\times3+\frac{135}{512}\times4=\frac{1471}{512}$ ……………………………… 12分

20. 解:(1)由题:$\because A+B+C=\pi$,$\therefore \sin(B+C)=\sin A$,根据余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

可知 $2ac\sin(B+C)+a^2+c^2-b^2=0\Rightarrow\sin A+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=0\Rightarrow\sin A+\cos B=0$

又因为 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 内角,$\therefore \sin A>0,\cos B<0$,$\therefore B=A+\frac{\pi}{2}$

$\because A=\frac{\pi}{6}$,$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$,$\therefore C=\frac{\pi}{6}$,$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等腰三角形 $a=c=2$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$ ……………………………………………… 6分

(2)由(1)可知 $B=A+\frac{\pi}{2}$,又$\because A+B+C=\pi$,$C=\pi-A-B=\frac{3\pi}{2}-2B$,$A=B-\frac{\pi}{2}$

代入化简可得原式 $=\frac{4\cos^2 2B+3\cos^2 B+2}{\sin^2 B}=f(B)$

$f(B)=\frac{4\cos^2 2B+3\cos^2 B+2}{\sin^2 B}=\frac{4(1-2\sin^2 B)^2+3(1-\sin^2 B)+2}{\sin^2 B}=\frac{16\sin^4 B-19\sin^2 B+9}{\sin^2 B}$

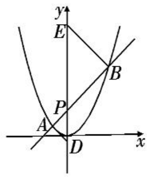
$f(B)=16\sin^2 B+\frac{9}{\sin^2 B}-19$, $\sin^2 B\in(0,1)$

$f(B)=16\sin^2 B+\frac{9}{\sin^2 B}-19\geqslant2\sqrt{16\sin^2 B\cdot\frac{9}{\sin^2 B}}-19=5$

当且仅当"$16\sin^2 B=\frac{9}{\sin^2 B}$",即 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$B=\frac{2\pi}{3}$时等号成立

所以该式的最小值是5,此时 $B=\frac{2\pi}{3}$ ……………………………………………… 12分

21. 解：(1) 设 $l: y=kx+2$ 与 $x^2=2py$ 联立可得，$x^2-2pkx-4p=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-4p$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\dfrac{x_1^2x_2^2}{4p^2}=-4p+4=-4$，



解得 $p=2$. 故抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$. ………………………………………… 4 分

(2) 由题可知 $k_{AD}=-\dfrac{1}{k}$，故 $|AP|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1|$，$|AD|=\sqrt{1+\left(-\dfrac{1}{k}\right)^2}\,|x_1|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\,|x_1|$，

故 $S_1=\dfrac{1}{2}|AP||AD|=\dfrac{(1+k^2)x_1^2}{2k}$，同理可知 $S_2=\dfrac{(1+k^2)x_2^2}{2k}$，$S_1+S_2=\dfrac{(1+k^2)(x_1^2+x_2^2)}{2k}=\dfrac{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]}{2k}=\dfrac{8(1+k^2)^2}{k}$ ………………………………………… 8 分

令 $f(k)=\dfrac{8(1+k^2)^2}{k}$，$f'(k)=\dfrac{8(3k^2-1)(k^2+1)}{k^2}$，令 $f'(k)>0$，解得 $k>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故 $f(k)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 单调递增，故当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$f(k)$ 取得最小值，此时 l 为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 当 $a=1$，$b=4$ 时，$f(x)=(x^2+4x+1)\ln x$，

① $f'(x)=(2x+4)\ln x+x+\dfrac{1}{x}+4$，$\therefore f(1)=0$，$f'(1)=6$，

故 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：$y=6(x-1)$. ………………………………………… 3 分

② $\because x^2+4x+1>0$，$\therefore f(x)\leqslant 3x^2-3 \Leftrightarrow \ln x\leqslant\dfrac{3x^2-3}{x^2+4x+1}$

令 $h(x)=\ln x-\dfrac{3x^2-3}{x^2+4x+1}(0<x\leqslant 1)$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{12(x^2+x+1)}{(x^2+4x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)^2}\geqslant 0$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$\therefore h(x)\leqslant h(1)=0$ 即 $\ln x\leqslant\dfrac{3x^2-3}{x^2+4x+1}$ 成立

综上，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)\leqslant 3x^2-3$. ………………………………………… 7 分

(2) 当 $a=0$ 时，$f(x)=(bx+1)\ln x$，$f'(x)=b\ln x+\dfrac{1}{x}+b$，$g(x)=x-\dfrac{1}{x}-b\ln x$

当 $b\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不可能两个零点，舍去；

当 $b>0$ 时，$g'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{b}{x}=\dfrac{x^2-bx+1}{x^2}$，$\triangle=b^2-4$

若 $0<b\leqslant 2$，则 $\Delta\leqslant 0$，有 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不可能两个零点，舍去；

若 $b>2$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$，易知 $\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}>0$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{b-\sqrt{b^2-4}}{2},\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2},+\infty\right)$ 上

重庆市高2024届高三第二次质量检测

数学试题

2023.10

命审单位：重庆南开中学

注意事项：

1. 本试卷满分150分，考试时间120分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|x>2\}$，则 $A\cap(C_UB)$ 为

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{3,4,5\}$

2. 已知 β 是第三象限角，则点 $Q(\cos\beta,\sin 2\beta)$ 位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. "$m=2$"是"幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{2m+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 一组数据按从小到大的顺序排列为2，4，m，13，16，17，若该组数据的中位数是极差的 $\frac{3}{5}$，则该组数据的40百分位数是

A. 4　　B. 4.5　　C. 5　　D. 9

5. 已知 $f(x)=(e^x-e^{-x})\cos\omega x+x+2(\omega\in\mathbf{R})$，且 $f(3)=1$，则 $f(-3)=$

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

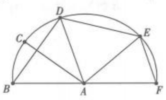
6. 数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：$a_1=8$，$a_n-a_{n-1}=8n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$，$b_n=\sqrt{a_n+1}\left(\frac{9}{10}\right)^n$，则数列 $\{b_n\}$ 的最大项是

A. 第7项　　B. 第9项　　C. 第11项　　D. 第12项

7. 已知 $|\varphi|\leqslant\pi$，将 $y=\sin(x+\varphi)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得到函数 $y=f(x)$．若对 $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right)$，都有 $f(x)<0$ 成立，则实数 φ 的取值范围是

A. $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$　　B. $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$　　C. $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$

8. 如图所示，某市拟将一个半圆形的空地改造为果园．设 $\angle BAC=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle DAE$，且 $0<\angle BAC<\frac{\pi}{4}$．若要在扇形 ABC 和四边形 $DAFE$ 内种满苹果，则当苹果的种植总面积最大时，$\angle BAC$ 的大小为



A. $\frac{\pi}{24}$　　B. $\frac{\pi}{12}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{8}$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对得5分，部分选对得2分，有选错得0分．

9. 已知实数 $a>b>0>c>d$，则下列不等式中一定正确的有

A. $\ln(a-c)>0$　　B. $ad<bc$

C. $\frac{c}{a}>\frac{c+b}{a+b}$　　D. $a^3+b^3>a^2b+ab^2$

10. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}$，则下列说法中正确的有

A. 2π 是 $f(x)$ 的一个周期　　B. $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心

C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递增　　D. 若 $f\left(\frac{\theta}{2}\right)=1$，则 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{a}-\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，下列说法正确的有

A. 当 $a=2$ 时，$f'(1)=0$　　B. 当 $a=2$ 时，有 $f(x)>0$ 恒成立

C. 当 $\frac{a}{\ln a}>2e$ 时，$f(x)$ 有两个零点　　D. 存在唯一的 a 使得 $f(x)$ 仅有一个零点

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 作直线 $y=\frac{2}{a}x$ 的垂线，垂足为 P，且与 C 的右支交于点 Q，O 为坐标原点，且 $\angle F_1PO=\frac{\pi}{6}$，则

A. $|OP|=\sqrt{3}$　　B. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{13}}{3}$

C. $\sin\angle PF_1F_2=\frac{\sqrt{21}}{14}$　　D. $S_{\triangle OF_2Q}=4\sqrt{3}-6$

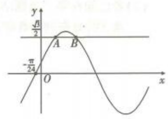
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为________．

14. 若 $\sin(\pi-\alpha)=2\cos\alpha$，则 $\sin 2\alpha+\sin^2\alpha=$________．

15. 已知 $f(x)=ax^2+x$，$g(x)=\frac{1-\cos x}{2+\sin x}$，若对 $\forall x_1\geqslant 1$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$ 使 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围是________．

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$．如图，直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 交于 A,B 两点，$|AB|=\frac{\pi}{6}$，则 $\varphi=$________．$y=f(x)$ 在区间 $\left[t,t+\frac{\pi}{4}\right](t\in\mathbf{R})$ 上的最大值与最小值的差的范围是________．



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n+n-3(n\in\mathbf{N}^*)$.

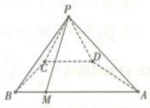
（1）求证：数列$\{a_n-1\}$是等比数列；

（2）求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

18.（本小题满分 12 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$，侧面 PCD 是等边三角形，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，$AB=2CD=2BC$，$M$ 在棱 AB 上，且满足 $AB=4BM$.

（1）求证：$PM\perp CD$；

（2）求二面角 $P-CM-A$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日在成都举行的第三十一届世界大学生夏季运动会是中国西部第一次举办世界性综合运动会。在本届成都大运会中，共有 800 多支城市志愿服务队 139 万青年志愿者参加。现某城市志愿服务队通过报名者对某比赛项目的了解程度进行筛选，筛选规则：对报名者进行分组，每两人一组，同组两人以抢答形式进行比赛，共 7 道题，抢到并回答正确得一分，答错则对方得一分，先得 4 分者获胜，比赛结束. 已知在这次分组中，甲乙两人被分为一组，已知甲，乙两人都参与每一次抢题，且每次抢到的概率相同，甲和乙正确回答每道题的概率分别是$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{2}$，且两人各道题是否回答正确均相互独立.

（1）在第二道题结束时，求甲：乙的比分为 2:0 的概率；

（2）若已知在第三道题结束时甲得分以 2:1 领先，设到比赛结束时，两人共再继续抢答了 X 道题，求 X的分布列和数学期望.

数学试题　第 3 页（共 4 页）

20.（本小题满分 12 分）在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $2ac\sin(B+C)+a^2+c^2-b^2=0$.

（1）若 $A=\frac{\pi}{6}$，$a=2$，求$\triangle ABC$ 的面积；

（2）求$\frac{4\sin^2C+3\sin^2A+2}{\sin^2B}$的最小值，并求出此时 B 的大小.

21.（本小题满分 12 分）过点 $P(0,2)$作斜率为 $k(k>0)$的直线 l 与抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$交于 A,B 两点，O 为坐标原点，当 $k=1$ 时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过点 A 作 $AD\perp AB$ 交 y 轴于点 D，过点 B 作 $BE\perp AB$ 交 y 轴于点 E，记$\triangle PAD$，$\triangle PBE$ 面积分别为 S_1,S_2，求当 S_1+S_2取得最小值时直线 l 的方程.

22.（本小题满分 12 分）设函数$f(x)=(ax^2+bx+1)\ln x(a,b\in\mathbf{R})$.

（1）当 $a=1,b=4$ 时，

①求 $y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

②求证：当 $x\in(0,1]$时，$f(x)\leqslant 3x^2-3$；

（2）当 $a=0$ 时，已知 $x_1,x_2(0<x_1<1<x_2)$为函数 $g(x)=x-f'(x)+b$ 的两个零点（$f'(x)$为$f(x)$的导数），求证：$x_2-x_1>\sqrt{(4-3b)^2-4}$.

数学试题　第 4 页（共 4 页）