自主选拔在线
www.zizzs.com
专注中学拔尖人才培养

雅礼中学2021届高三月考试卷(七)

数　学

命题人:卿科　审题人:黄文辉、陈朝阳

得分:______________

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共8页。时量120分钟。满分150分。

第Ⅰ卷

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

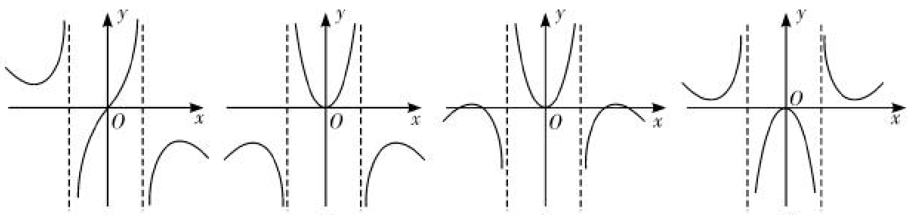
1. 已知全集为实数集 $\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid -3<x<6\}$,$B=\{x\mid x^2-9x+14<0\}$,则 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $(2,6)$　　B. $(2,7)$　　C. $(-3,2]$　　D. $(-3,2)$

2. 若 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\cdot\mathrm{i}^3$,则 z 的虚部为

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{x^2-1}$ 的图象大致是

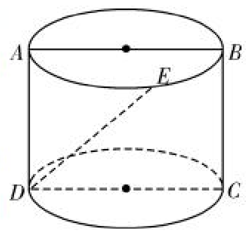


A　　B　　C　　D

4. 某新晋网红一线城市鹅城人口模型近似为 $P=250024\mathrm{e}^{0.012t}$,其中 $t=0$ 表示2020年的人口数量,则鹅城人口数量达到320000的年份大约是($\ln 2\approx0.693$,$\ln 3\approx1.099$,$\ln 5\approx1.609$)

A. 2040年　　B. 2045年　　C. 2030年　　D. 2050年

5. 我们打印用的A4纸的长与宽的比约为 $\sqrt{2}$,之所以是这个比值,是因为把纸张对折,得到的新纸的长与宽之比仍约为 $\sqrt{2}$,纸张的形状不变.已知圆柱的母线长小于底面圆的直径长(如图所示),它的轴截面 $ABCD$ 为一张A4纸,若点 E 为上底面圆上弧 AB 的中点,则异面直线 DE 与 AB 所成的角约为



A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

官方微信公众号:zizzsw　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　微信客服:zizzs2018

6. 十二生肖，又称十二属相，与中国传统文化中的十二地支呈现一一对应关系，分别为子鼠、丑牛、寅虎、卯兔、辰龙、巳蛇、午马、未羊、申猴、酉鸡、戌狗、亥猪. 现有十二生肖吉祥物各一件，甲、乙、丙三位同学分别随机抽取一件作为礼物. 甲同学喜欢马、牛，乙同学喜欢马、龙、狗，丙同学除了鼠不喜欢外其他的都喜欢，则这三位同学恰好都抽到各自喜欢的礼物的概率是

A. $\frac{3}{88}$　　B. $\frac{3}{44}$　　C. $\frac{1}{20}$　　D. $\frac{9}{44}$

7. 唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句说："白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河."诗中隐含着一个有趣的数学问题——"将军饮马"问题，即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回到军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设军营所在区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$，若将军从点 $A(2,0)$ 处出发，河岸线所在直线方程为 $x+y=3$，并假定将军只要到达军营所在区域即回到军营，则"将军饮马"的最短总路程为

A. $\sqrt{10}-1$　　B. $2\sqrt{2}-1$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}$

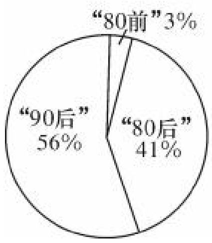
8. 将函数 $f(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)$ 和直线 $g(x)=x-1$ 的所有交点从左到右依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若 P 点坐标为 $(0,\sqrt{3})$，则 $|\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}|=$

A. 0　　B. 2　　C. 6　　D. 10

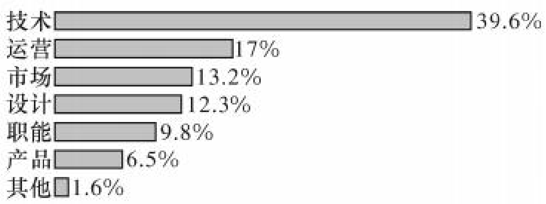
二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 某调查机构对全国互联网行业进行调查统计，得到如下整个互联网行业从业者年龄分布饼状图、"90 后"从事互联网行业岗位分布条形图，则下列结论中正确的是

互联网行业从业者年龄分布饼状图



"90后"从事互联网行业岗位分布条形图



注："90 后"指 1990 年及以后出生的人，"80 后"指 1980—1989 年之间出生的人，"80 前"指 1979 年及以前出生的人.

A. 互联网行业从业人员中"90 后"占一半以上

B. 互联网行业中从事技术岗位的人数超过总人数的 20%

C. 互联网行业中从事运营岗位的人数"90 后"比"80 前"多

D. 互联网行业中从事技术岗位的人数"90 后"比"80 后"多

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

10. 设 $a>b>1$，$0<c<1$，则下列不等式中，成立的是

A. $a^c<b^c$　　B. $a^b>b^c$

C. $\log_b c<\log_a c$　　D. $\log_c b<\log_c a$

11. 已知等比数列$\{a_n\}$首项 $a_1>1$，公比为 q，前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，函数 $f(x)=x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_7)$，若 $f'(0)=1$，则

A. $\{\lg a_n\}$为单调递增的等差数列

B. $0<q<1$

C. $\left\{S_n-\dfrac{a_1}{1-q}\right\}$为单调递增的等比数列

D. 使得 $T_n>1$ 成立的 n 的最大值为 6

12. 已知直线 $l:2kx-2y-kp=0$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$相交于 A，B 两点，点 $M(-1,-1)$是抛物线 C 的准线与以 AB 为直径的圆的公共点，则下列结论正确的是

A. $p=2$　　B. $k=-2$

C. $\triangle MAB$ 的面积为 $5\sqrt{5}$　　D. $|AB|=5$

选择题答题卡

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答 案													

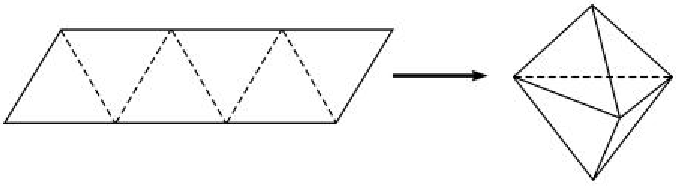
第Ⅱ卷

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$在点(1,2)处的切线方程为________.

14. 在$(1-2x)^5(2+x)$展开式中，x^4 的系数为________.

15. 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粒，俗称“粽子”，古称“角黍”，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原. 如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为 1 的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体，则该六面体的体积为________.



官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

16. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线 l 分别与双曲线左、右两支交于 M,N 两点，且 $F_2M\perp F_2N$，$|F_2M|=|F_2N|$，则双曲线 C 的离心率为__________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

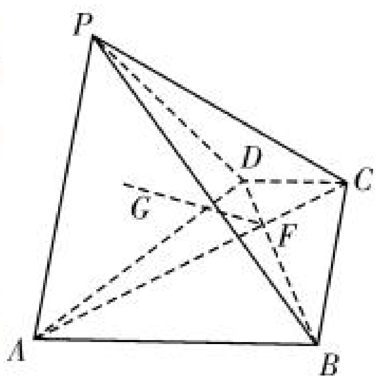
17.（本小题满分 10 分）

从条件①$2S_n=(n+1)a_n$，②$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=a_n\ (n\geqslant 2)$，③$a_n>0$，$a_n^2+a_n=2S_n$ 中任选一个，补充到下面问题中，并给出解答.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，________. 若 a_1,a_k,S_{k+2} 成等比数列，求 k 的值.

18.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB/\!/CD$，$AB=2DC=2\sqrt{3}$，$AC\cap BD=F$，且 $\triangle PAD$ 与 $\triangle ABD$ 均为正三角形，G 为 $\triangle PAD$ 的重心.



(1) 求证：$GF/\!/$ 平面 PDC；

(2) 求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.

19.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $b+a(\sin C-\cos C)=0$.

(1)求 A；

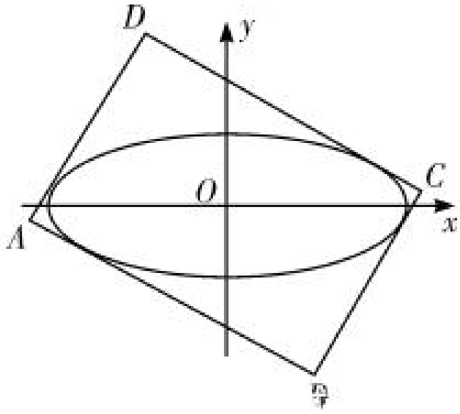
(2)若 D 为 BC 边上一点，且 $AD\perp BC$，$BC=(2\sqrt{2}+2)AD$，求

20.（本小题满分 12 分）

设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$离心率 $e=\frac{1}{2}$，椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 3.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)求椭圆 C 的外切矩形（即矩形的四边所在的直线均与椭圆相切）$ABCD$ 的面积 S 的取值范围.



自主选拔在线
微信号：zizzsw
自主选拔在线
微信号：zizzsw

21.（本小题满分12分）

随着中美贸易战的不断升级，越来越多的国内科技巨头加大了科技研发投入的力度.某科技公司拟对“麒麟”手机芯片进行科技升级，根据市场调研与模拟，得到科技升级投入 x（亿元）与科技升级直接收益 y（亿元）的数据统计如下：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	2	3	4	6	8	10	13	21	22	23	24	25
y	13	22	31	42	50	56	58	68.5	68	67.5	66	66

当 $0<x\leqslant 17$ 时，建立了 y 与 x 的两个回归模型：

模型①：$\hat{y}=4.1x+11.8$；模型②：$\hat{y}=21.3\sqrt{x}-14.4$.

当 $x>17$ 时，确定 y 与 x 满足的线性回归方程为 $\hat{y}=-0.7x+a$.

(1)根据下列表格中的数据，比较当 $0<x\leqslant 17$ 时模型①、②的相关指数 R^2 的大小，并选择拟合精度更高、更可靠的模型，预测对“麒麟”手机芯片科技升级的投入为17亿元时的直接收益.

回归模型	模型①	模型②
回归方程	$\hat{y}=4.1x+11.8$	$\hat{y}=21.3\sqrt{x}-14.4$
$\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\hat{y}_i)^2$	182.4	79.2

（附：刻画回归效果的相关指数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$，$\sqrt{17}\approx 4.1$）

(2)为鼓励科技创新，当科技升级的投入不少于20亿元时，国家给予公司补贴5亿元，以回归方程为预测依据，比较科技升级投入17亿元与20亿元时公司实际收益的大小.

（附：用最小二乘法求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的系数：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$）

(3)科技升级后，“麒麟”芯片效率 X 大幅提高，经实际试验得 X 大致服从正态分布 $N(0.52,0.01^2)$.公司对科技升级团队的奖励方案如下：若芯片的效率不超过50%，不予奖励；若芯片的效率超过50%，但不超过53%，每部芯片奖励2元；若芯片的效率超过53%，每部芯片奖励4元，记 Y 为每部芯片获得的奖励，求 $E(Y)$（精确到0.01）.

（附：若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$）

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax, g(x)=\ln x-ax, a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a<e$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

(2)记函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的最小值为 m，求 $G(x)=e^x-e^m\ln x$ 的最小值.

自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw

雅礼中学2021届高三月考试卷(七)

数学参考答案

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	A	D	A	C	A	A	D

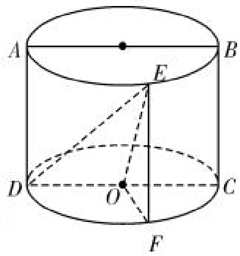
1. C 【解析】∵$B=\{x\mid x^2-9x+14<0\}=\{x\mid 2<x<7\}$,∴$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant 2或x\geqslant 7\}$,
∴$A\cap(\complement_U B)=\{x\mid -3<x\leqslant 2\}=(-3,2]$.故选C.

2. A 【解析】因为$z=\dfrac{1+i}{1-2i}\cdot i^3=\dfrac{1+i}{1-2i}\cdot(-i)=\dfrac{1-i}{1-2i}=\dfrac{(1-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{3+i}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i$,
所以z的虚部为$\dfrac{1}{5}$.故选A.

3. D 【解析】$f(-x)=\dfrac{-x(e^{-x}-e^{x})}{x^2-1}=\dfrac{x(e^{x}-e^{-x})}{x^2-1}=f(x)$,$f(x)$是偶函数,排除A,
$x>0$时,$e^x>e^{-x}$,即$e^x-e^{-x}>0$,当$x>1$时,又有$x^2-1>0$,因此$f(x)>0$,排除B,C,故选D.

4. A 【解析】由已知,得$\ln\left(\dfrac{320000}{250024}\right)=\ln e^{0.012t}$,则$\dfrac{\ln\left(\dfrac{320000}{250024}\right)}{0.012}=t$,近似于$\dfrac{5\ln 2-2\ln 5}{0.012}\approx 20.583$,过20年或21年,结合选项选A,故选A.

5. C 【解析】∵$AB//CD$,∴$\angle EDC$(或补角)为异面直线DE与AB所成的角,
设CD的中点为O,过E作$EF\perp$底面$\odot O$,连接OE,OF,
∵E是弧AB的中点,∴F是弧CD的中点,∴$CD\perp OF$,
又$EF\perp$平面$\odot O$,∴$EF\perp CD$,$EF\cap OF=F$,∴$CD\perp$平面OEF,∴$OD\perp OE$.
设$AD=1$,则$CD=\sqrt{2}$,故$OF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$EF=1$,于是$OE=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,
∴$\tan\angle EDO=\dfrac{OE}{OD}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$,∴$\angle EDO=\dfrac{\pi}{3}$.故选C.

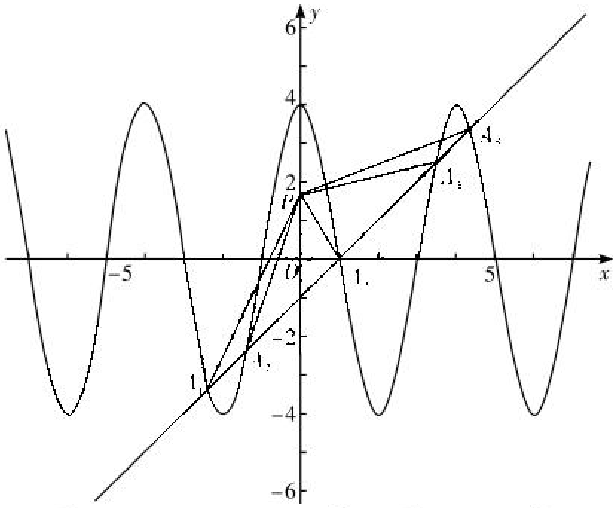


6. A 【解析】依题意可分类:①甲同学选马,则有$C_2^1C_9^1=18$种情况符合要求;②甲同学选牛,则有$C_3^1C_9^1=27$种情况符合要求;三位同学抽取礼物的所有情况有A_{12}^3种,则这三位同学恰好都抽到各自喜欢的礼物的概率$P=\dfrac{18+27}{A_{12}^3}=\dfrac{3}{88}$.故选A.

7. A 【解析】设点A关于直线$x+y=3$的对称点$A'(a,b)$,AA'的中点为$\left(\dfrac{a+2}{2},\dfrac{b}{2}\right)$,$k_{AA'}=\dfrac{b}{a-2}$,故
$$\begin{cases}\dfrac{b}{a-2}\cdot(-1)=-1,\\ \dfrac{a+2}{2}+\dfrac{b}{2}=3,\end{cases}解得\begin{cases}a=3,\\ b=1.\end{cases}$$
要使从点A到军营总路程最短,即为点A'到军营最短的距离,
"将军饮马"的最短总路程为$\sqrt{10}-1$,故选A.

8. D 【解析】函数$f(x)=4\cos\dfrac{\pi}{2}x$与$g(x)=x-1$的所有交点从左往右依次记为$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$和$A_5$,且$A_1$和$A_5$,$A_2$和$A_4$都关于点$A_3$对称,如图所示:

官方微信公众号:zizzsw　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　微信客服:zizzs2018



则$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_5}=5\overrightarrow{PA_3}=5(1,-\sqrt{3})$,所以$|\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}|=10$.故选D.

二、多项选择题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得2分.

题　号	9	10	11	12
答　案	ABC	BC	BCD	ABD

9. ABC 【解析】由题图可知,互联网行业从业人员中"90后"占总人数的56%,超过一半,A正确;
互联网行业从业人员中"90后"从事技术岗位的人数占总人数的56%×39.6%=22.176%,超过20%,所以互联网行业从业人员(包括"90后""80后""80前")从事技术岗位的人数超过总人数的20%,B正确;
互联网行业从业人员中"90后"从事运营岗位的人数占总人数的56%×17%=9.52%,超过"80前"的人数占总人数的比例,且"80前"中从事运营岗位的比例未知,C正确;
互联网行业从业人员中"90后"从事技术岗位的人数占总人数的56%×39.6%=22.176%,小于"80后"的人数占总人数的比例,但"80后"中从事技术岗位的比例未知,D不一定正确.故选ABC.

10. BC 【解析】$0<c<1\Rightarrow a^c>b^c$,故A错误;因为$a>b>1,0<c<1$,所以$a^b>b^b>b^c$,故B正确;由对数函数的单调性可得$\log_c b>\log_c a$,故D错误;因为$\log_b c=\dfrac{1}{\log_c b}$,$\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$,$0>\log_c b>\log_c a$,所以$\log_b c<\log_a c$,故C正确.故选BC.

11. BCD 【解析】令$g(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_7)$,则$f(x)=xg(x)$,$\therefore f'(x)=g(x)+xg'(x)$,
$\therefore f'(0)=g(0)=a_1a_2\cdots a_7=1$,因为$\{a_n\}$是等比数列,所以$a_1a_2\cdots a_7=a_4^7=1$,即$a_4=1=a_1q^3$,
$\because a_1>1$,$\therefore 0<q<1$,B正确;
$\because \lg a_n=\lg(a_1q^{n-1})=\lg a_1+(n-1)\lg q$,$\therefore\{\lg a_n\}$是公差为$\lg q$的递减等差数列,A错误;
$\because S_n-\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}(1-q^n-1)=\dfrac{a_1q}{q-1}\cdot q^{n-1}$,$\therefore\left\{S_n-\dfrac{a_1}{1-q}\right\}$是首项为$\dfrac{a_1q}{q-1}<0$,公比为$q$的递增等比数列,C正确;
$\because a_1>1,0<q<1,a_4=1$,$\therefore n\leqslant 3$时,$a_n>1$,$n\geqslant 5$时,$0<a_n<1$,$\therefore n\leqslant 4$时,$T_n>1$,$\because T_7=a_1a_2\cdots a_7=a_4^7=1$,
$\therefore n\geqslant 8$时,$T_n=T_7a_8a_9\cdots a_n<T_7=1$,又$T_5=\dfrac{T_7}{a_6a_7}>1$,$T_6=\dfrac{T_7}{a_7}>1$,所以使得$T_n>1$成立的$n$的最大值为6,D正确.故选BCD.

12. ABD 【解析】由题意知,抛物线C的准线为$x=-1$,即$\dfrac{p}{2}=1$,解得$p=2$,故选项A正确;
因为$p=2$,所以抛物线C的方程为:$y^2=4x$,其焦点为$F(1,0)$,
又直线$l:2kx-2y-kp=0$,即$y=k(x-1)$,所以直线l恒过抛物线的焦点$F(1,0)$,
设点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为A,B两点在抛物线C上,
联立方程$\begin{cases}y_1^2=4x_1,\\y_2^2=4x_2,\end{cases}$两式相减可得,$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=k$,
设AB的中点为$Q(x_0,y_0)$,则$y_0=\dfrac{2}{k}$,因为点$Q(x_0,y_0)$在直线l上,

官方微信公众号:zizzsw
咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com
微信客服:zizzs2018

解得 $x_0=\frac{2}{k^2}+1$，所以点 $Q\left(\frac{2}{k^2}+1,\frac{2}{k}\right)$ 是以 AB 为直径的圆的圆心，

由抛物线的定义知，圆 Q 的半径 $r=\frac{AB}{2}=\frac{x_1+x_2+2}{2}=\frac{2x_0+2}{2}=\frac{2}{k^2}+2$.

因为 $|QM|^2=\left(\frac{2}{k^2}+2\right)^2+\left(\frac{2}{k}+1\right)^2=r^2$，所以 $\left(\frac{2}{k^2}+2\right)^2+\left(\frac{2}{k}+1\right)^2=\left(\frac{2}{k^2}+2\right)^2$，

解得 $k=-2$，故选项 B 正确；

因为 $k=-2$，所以直线 l 为 $y+2(x-1)=0$，由点到直线的距离公式可得，

点 M 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-4-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，所 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times5=\frac{5\sqrt{5}}{2}$，故选项 C 错误；

因为 $k=-2$，所以弦长 $|AB|=2r=2\left(\frac{2}{k^2}+2\right)=2\left(\frac{2}{4}+2\right)=5$，故选项 D 正确；故选 ABD.

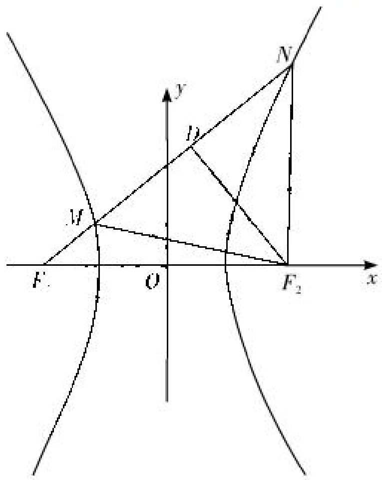
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $y=x+1$ 【解析】设 $y=f(x)$，则 $f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$，所以 $f'(1)=2-1=1$，所以曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为 $y-2=1\times(x-1)$，即 $y=x+1$.

14. 80 【解析】$(1-2x)^5(2+x)=2(1-2x)^5+x(1-2x)^5$，
二项式 $(1-2x)^5$ 的展开式的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_5^r(-2)^rx^r$，
令 $r=3$，则 $T_4=C_5^3(-2)^3x^3=-80x^3$，令 $r=4$，则 $T_5=C_5^4(-2)^4x^4=80x^4$，
则 $(1-2x)^5(2+x)$ 展开式中，x^4 的系数为 $2\times80-80=80$.

15. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ 【解析】每个三角形面积是 $S=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，由对称性可知该六面体是由两个正四面体合成的，可求出该四面体的高为 $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故四面体体积 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$，因此该六面体体积是正四面体的 2 倍，所以六面体体积是 $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

16. $\sqrt{3}$ 【解析】如图，作 $F_2D\perp MN$ 于 D，根据双曲线定义 $|MF_2|-|MF_1|=2a$，$|NF_1|-|NF_2|=2a$，
所以 $|NF_1|-|NF_2|=|MN|-2a=2a$，所以 $|MN|=4a$，
所以 $|MF_2|=|NF_2|=2\sqrt{2}a$，$|MF_1|=(2\sqrt{2}-2)a$，$|F_2D|=2a$，$|F_1D|=2\sqrt{2}a$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2D$ 中，$4c^2=(2\sqrt{2}a)^2+(2a)^2$，化简得 $\frac{c^2}{a^2}=3$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.



四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】若选择①，
因为 $2S_n=(n+1)a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $2S_{n+1}=(n+2)a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，
两式相减得 $2a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$，整理得 $na_{n+1}=(n+1)a_n$.

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

即$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为常数列. $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$，所以$a_n=n$. …………………… 5分

$\left(\text{或由}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}\text{，利用相乘相消法，求得}a_n=n\right)$

所以$a_k=k$，$S_{k+2}=\frac{(k+2)(1+k+2)}{2}=\frac{(k+2)(k+3)}{2}$.

又a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列，所以$(k+2)(k+3)=2k^2$.

所以$k^2-5k-6=0$，解得$k=6$或$k=-1$(舍)，所以$k=6$. …………………… 10分

若选择②，

由$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=a_n$ $(n\geqslant2)$变形得，$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=S_n-S_{n-1}$，

所以$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$，

易知$S_n>0$，所以$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，所以$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列.

又$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$，所以$\sqrt{S_n}=n$，$S_n=n^2$，$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$ $(n\geqslant2)$，

又$n=1$时，$a_1=1$也满足上式，所以$a_n=2n-1$. …………………… 5分

因为a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列，$\therefore(k+2)^2=(2k-1)^2$，

$\therefore k=3$或$k=-\frac{1}{3}$，又$k\in\mathbf{N}^*$，$\therefore k=3$. …………………… 10分

若选择③，

因为$a_n^2+a_n=2S_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，所以$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}$ $(n\geqslant2)$，

两式相减得$a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}=2S_n-2S_{n-1}=2a_n$ $(n\geqslant2)$，

整理得$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$ $(n\geqslant2)$，

因为$a_n>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=1$ $(n\geqslant2)$，所以$\{a_n\}$是等差数列，

所以$a_n=1+(n-1)\times1=n$. …………………… 5分

$S_{k+2}=\frac{(k+2)(1+k+2)}{2}=\frac{(k+2)(k+3)}{2}$，

又a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列，$\therefore(k+2)(k+3)=2k^2$，

$\therefore k=6$或$k=-1$，又$k\in\mathbf{N}^*$，$\therefore k=6$. …………………… 10分

18.【解析】(1)设PD的中点为E，连接AE，CE，GF.

$\because AB/\!/CD$，$AB=2DC=2\sqrt{3}$，$AC\cap BD=F$，$\therefore\frac{AF}{FC}=\frac{AB}{CD}=2$.

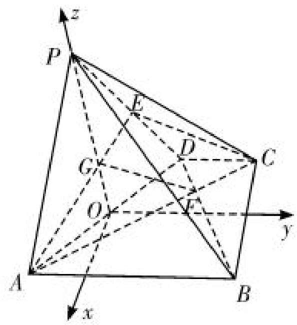
又$\because G$为$\triangle PAD$的重心G，$\therefore\frac{AG}{GE}=2$，$\therefore GF/\!/CE$.

又$\because GF\not\subset$面PDC，$CE\subset$面PDC，$\therefore GF/\!/$平面PDC. …………………… 6分

(2)设O为AD的中点，$\triangle PAD$为正三角形，则$PO\perp AD$.

$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$\therefore PO\perp$平面$ABCD$.

过O分别作BC，AB的平行线，建系如图.



$\because P(0,0,3)$，$B\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$.

易知平面PAD的法向量$\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},0)$.

设平面PBC的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

$\therefore\overrightarrow{PB}=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},-3\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,0,0)$，

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}_2=\frac{3}{2}x_2+\frac{3\sqrt{3}}{2}y_2-3z_2=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}_2=-3x_2=0.\end{cases}$

得$\boldsymbol{n}_2=\left(0,\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$，$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{3}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

从而，平面PAD与平面PBC所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$. …………………… 12分

19.【解析】(1)因为 $b+a(\sin C-\cos C)=0$，所以 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，
所以 $\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\sin C-\sin A\cos C=0$，
即 $\cos A\sin C+\sin A\sin C=0$.
因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\sin A+\cos A=0$，则 $\tan A=-1$.
因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{3\pi}{4}$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $AD\perp BC$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}a\cdot AD$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}bc=a\cdot AD$.

因为 $BC=(2\sqrt{2}+2)AD$，所以 $AD=\frac{a}{2+2\sqrt{2}}$，所以 $a^2=(2+\sqrt{2})bc$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，则 $(2+\sqrt{2})bc=b^2+c^2+\sqrt{2}bc$，
整理得 $(b-c)^2=0$，即 $b=c$，故 $B=C$.

因为 $A=\frac{3\pi}{4}$，所以 $B=\frac{\pi}{8}$，所以 $\sin 2B=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题设条件可得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a+c=3$，解得 $a=2$，$c=1$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)当矩形 $ABCD$ 的一组对边斜率不存在时，得矩形 $ABCD$ 的面积 $S=8\sqrt{3}$.

当矩形 $ABCD$ 四边斜率都存在时，不妨设 AB，CD 所在直线斜率为 k，则 BC，AD 斜率为 $-\frac{1}{k}$，设直线 AB

方程为 $y=kx+m$，与椭圆联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 可得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

由 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)=0$，得 $m^2=4k^2+3$.

由对称性知直线 CD 的直线方程为 $y=kx-m$，直线 AB，CD 间的距离 $d_1=\frac{2|m|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{\frac{m^2}{k^2+1}}=$

$2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$，

同理可求得 BC，AD 间的距离为 $d_2=2\sqrt{\frac{\frac{4}{k^2}+3}{\frac{1}{k^2}+1}}=2\sqrt{\frac{4+3k^2}{k^2+1}}$，

所以四边形 $ABCD$ 面积为

$S_{ABCD}=d_1d_2=4\sqrt{\frac{3+4k^2}{k^2+1}}\sqrt{\frac{4+3k^2}{k^2+1}}=4\sqrt{\frac{12k^4+25k^2+12}{k^4+2k^2+1}}=4\sqrt{12+\frac{k^2}{k^4+2k^2+1}}$

$=4\sqrt{12+\frac{1}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}}\leqslant 4\sqrt{12+\frac{1}{4}}=14$(等号当且仅当 $k=\pm 1$ 时成立).

又 $S_{ABCD}>4\sqrt{12}=8\sqrt{3}$，故由以上可得外切矩形面积的取值范围是 $[8\sqrt{3},14]$. ……………………… 12 分

21.【解析】(1) 由表格中的数据，$182.4>79.2$，所以 $\frac{182.4}{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}>\frac{79.2}{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}$，

所以 $1-\frac{182.4}{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}<1-\frac{79.2}{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}$. 可见模型①的相关指数 R_1^2 小于模型②的相关指数 R_2^2.

所以回归模型②的拟合效果更好.
所以当 $x=17$ 亿元时，科技升级直接收益的预测值为
$\hat{y}=21.3\times\sqrt{17}-14.4\approx 21.3\times 4.1-14.4=72.93$(亿元). ……………………………………………… 4 分

(2)当 $x>17$ 时，由已知可得 $\bar{x}=\frac{21+22+23+24+25}{5}=23$，$\bar{y}=\frac{68.5+68+67.5+66+66}{5}=67.2$.

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

所以 $a=\bar{y}+0.7\bar{x}=67.2+0.7\times 23=83.3$.

所以当 $x>17$ 时，y 与 x 满足的线性回归方程为 $\hat{y}=-0.7x+83.3$.

当 $x=20$ 时，科技升级直接收益的预测值为 $\hat{y}=-0.7\times 20+83.3=69.3$ 亿元.

当 $x=20$ 亿元时，实际收益的预测值为 $69.3+5=74.3$ 亿元 >72.93 亿元，

所以技术升级投入 20 亿元时，公司的实际收益更大. ………………………………………… 8 分

(3)因为 $\mu-2\sigma=0.50$，$\mu+\sigma=0.53$，所以

$P(0.50<X\leqslant 0.53)=P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)$

$=P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu-\sigma)+P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)$

$=\dfrac{0.9545-0.6827}{2}+0.6827=0.8186$；$P(X>0.53)=P(X>\mu+\sigma)=\dfrac{1-0.6827}{2}$.

所以 $E(Y)=0+2\times 0.8186+4\times\dfrac{1-0.6827}{2}=2.2718\approx 2.27$(元). ………………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=e^x-a$.

①当 $a<0$ 时，$f'(x)=e^x-a>0$，$f(x)$ 单调递增，又 $f(0)=1$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=e^{\frac{1}{a}}-1<0$，

所以函数 $f(x)$ 有唯一零点；

②当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x>0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 无零点；

③当 $0<a<e$ 时，令 $f'(x)=e^x-a=0$，得 $x=\ln a$.

当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a=a(1-\ln a)$，故当 $0<a<e$ 时，$f(\ln a)>0$，所以函数 $f(x)$ 无零点.

综上所述，当 $0\leqslant a<e$ 时函数 $f(x)$ 无零点；当 $a<0$，函数 $f(x)$ 有一个零点. ………………………… 4 分

(2)由题意得，$F(x)=e^x-\ln x$，则 $F'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，令 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，则 $h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，即 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

又 $F'(1)=e-1>0$，$F'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，所以 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，

且 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，$F'(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，即 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为减函数，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上为增函数，$F(x)$ 的最小值 $m=F(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0$.

因为 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，所以 $x_0=-\ln x_0$，所以 $m=\dfrac{1}{x_0}+x_0>2$.

由 $G(x)=e^x-e^m\ln x$ 得 $G'(x)=e^x-\dfrac{e^m}{x}$，易知 $G'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

因为 $m>2$，所以 $G'(1)=e-e^m<0$，$G'(m)=e^m-\dfrac{e^m}{m}=e^m\left(1-\dfrac{1}{m}\right)>0$，所以 $G'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_1，且 $x_1\in(1,m)$，$G'(x_1)=e^{x_1}-\dfrac{e^m}{x_1}=0$. 当 $(0,x_1)$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上为减函数，当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$G'(x)>0$，$G(x)$ 在 $(x_1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $G(x)$ 的最小值为 $G(x_1)=e^{x_1}-e^m\ln x_1$，

因为 $e^{x_1}=\dfrac{e^m}{x_1}$，所以 $x_1=m-\ln x_1$，所以 $m=x_1+\ln x_1$，

又 $m=e^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}+\ln\dfrac{1}{x_0}$，所以 $x_1+\ln x_1=\dfrac{1}{x_0}+\ln\dfrac{1}{x_0}$，

又函数 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $x_1=\dfrac{1}{x_0}$，

$G(x_1)=e^{\frac{1}{x_0}}-e^m\cdot\ln\dfrac{1}{x_0}=e^{\frac{1}{x_0}}-e^{\frac{1}{x_0}+\ln\frac{1}{x_0}}\cdot\ln\dfrac{1}{x_0}=e^{\frac{1}{x_0}}-\dfrac{1}{x_0}\cdot e^{\frac{1}{x_0}}\cdot\ln\dfrac{1}{x_0}$

$=\dfrac{1}{x_0}\cdot e^{\frac{1}{x_0}}\cdot\left(x_0-\ln\dfrac{1}{x_0}\right)=\dfrac{1}{x_0}\cdot e^{\frac{1}{x_0}}\cdot(x_0+\ln x_0)$.

因为 $x_0+\ln x_0=0$，所以 $G(x_1)=0$，即 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 0. ……………………………… 12 分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601
9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

微信搜一搜
自主选拔在线