

2022-2023 学年第二学期 1 月六校联合调研试题

高三数学

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 \leq 1, x \in \mathbb{N}\}$ ，则集合 A 的子集个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 8 D. 16

2. $(1 + \frac{1}{x^2})(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为 ()

- A. 15 B. 20 C. 30 D. 40

3. 已知向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (1, 0)$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量的模为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

4. 3D 打印属于快速成形技术的一种，它是一种以数字模型文件为基础，运用粉末状金属或塑料等可粘合材料，通过逐层堆叠累积的方式来构造物体的技术（即“积层造型法”），过去常在模具制造、工业设计等领域被用于制造模型，现正用于一些产品的直接制造，特别是一些高价值应用（比如膝关节、牙齿或一些飞机零部件等），已知某球的表面上有四个点 A, B, C, D ，满足 BA, BC, BD 两两垂直且 $BA = BC = BD = 2\text{cm}$ ，现在利用 3D 打印技术制作模型，该模型是由该球的内部挖去由 $ABCD$ 组成的四面体后剩余的部分，打印所用原料密度为 $1\text{g}/\text{cm}^3$ ，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量约为 ()（参考数据：取 $\pi \approx 3.14$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ，计算结果精确到 0.1）

- A. 17.7g B. 18.4g C. 19.1g D. 20.4g

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，右顶点为 A ，上、下顶点分别为 B_1, B_2 ，线段 AB_2 的中点 E 和坐标原点 O 的连线 OE 与 B_1F 垂直，则椭圆 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设公比为 $q (q > 0)$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_2 = 2a_2 - 4$ ， $S_4 = 2a_4 - 4$ ，则 $a_6 =$ ()

- A. 128 B. 64 C. 32 D. 16

7. 已知 $\tan \alpha = 3 \tan(\alpha + \frac{\pi}{6})$ ，则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{3})$ 的值为 ()

- A. -1 B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

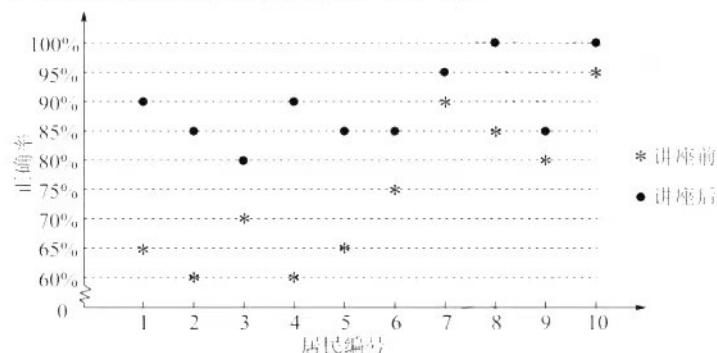
8. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时有 $f(x+1) = -f(x)$, 且 $x \in [0, 1]$ 时

$$f(x) = 2^x - 1, \text{ 若 } a = f(\log_3 45), b = f(-\log_5 8), c = f\left(\frac{4}{3}\right), \text{ 则 } (\quad)$$

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分. 请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑.

9. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的传染病预防知识. 为了解讲座效果, 随机抽取 10 位社区居民, 让他们在讲座前和讲座后各回答一份传染病预防知识问卷, 这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图:



则 ()

- A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%
B. 讲座后问卷答题的正确率的众数为 85%
C. 讲座后问卷答题的正确率的 70 百分位数是 90%
D. 讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差

10. 寒假期期间, 甲, 乙, 丙, 丁, 戊共 5 位同学被安排到 A, B, C, D 四个小区参加社会实践活动, 要求每个小区至少安排一位同学, 且每位同学只能到一个小区参加实践活动, 则下列结论正确的是 ()

- A. 不同的安排方法共有 240 种
B. 甲同学被安排到 A 小区的概率是 $\frac{1}{4}$
C. 甲乙两位同学被安排在同一小区的概率为 $\frac{1}{5}$
D. 在甲同学被安排到 A 小区的前提下, A 小区有两位同学的概率是 $\frac{2}{5}$

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - ax + 1$, 则 ()

- A. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
B. 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个极值点
C. 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有三个零点

D. 过原点可作曲线 $y = f(x)$ 的切线有且仅有两条.

12. 已知 $\odot M: (x+1)^2 + y^2 = 1$, 点 P 是直线 $l: x+y-1=0$ 上动点, 过点 P 作 $\odot M$ 的两条切线 PA, PB , A, B 为切点, 则 ()

A. $\odot M$ 关于直线 l 的对称圆方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

B. 若 Q 是 $\odot M$ 上动点, 则线段 PQ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$

C. 线段 AB 的最小值是 $\sqrt{2}$

D. 若 $\angle APB \geq \frac{\pi}{3}$, 则点 P 的轨迹长度为 $2\sqrt{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 记复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$, 若 $\bar{z}(2+i) = 1-2i$, 则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 已知 O 为坐标原点, 直线 $x=a$ 与抛物线 $C: y^2 = 2x$ 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$, 则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$

15. 设函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x + t (\omega > 0)$, 将 $y = f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, ω 取最小值时, 若 $f(x) \geq 0$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有解, 则实数 t 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$

16. 最早的数列从何而来, 也许结绳记事便是人类最早跟数列打交道的朴素方式, 人类所认识并应用于生活、生产的第一个数列便是自然数列. 现有数列 $\{a_n\}$ 满足: 第一项是 2^0 , 接下来的两项是 $2^0, 2^1$, 再接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$, 依此类推, 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{45} = \underline{\hspace{2cm}}$, 当 $n > 200$ 时, 若存在 $m (m \in \mathbb{N}^*)$, 使得 $S_n = 2^m + 1$, 则 $m+n$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\vec{p} = (\sin B, 1 - \cos 2B)$ ，

$$\vec{q} = (1, \sin A + \sin C), \quad \vec{p} \parallel \vec{q}$$

(1) 求证： $a + c = 2b$ ；

(2) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$ ，求 $\sin A$ 的值。

18. (本小题满分 12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = 1$ ，且 $nS_{n+1} - (n+1)S_n = n(n+1) (n \in N^*)$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = a_n \cdot 2^{1+a_n} (n \in N^*)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

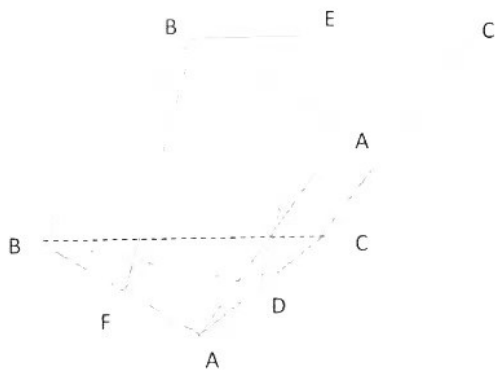
19. (本小题满分 12 分)

如图在斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = AC = 3$ ， $\angle B_1BC = 60^\circ$ ， $BB_1 = BC = 2$ ，

平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC ， E 是棱 B_1C_1 上一点， D, F 分别是 AC, AB 的中点。

(1) 当 $B_1C_1 = 2B_1E$ ，证明： $B_1F \parallel$ 平面 BED ；

(2) 当 $B_1C_1 = 4B_1E$ ，求锐二面角 $D - BE - C$ 的余弦值。



20. (本小题满分 12 分)

2023 年的春节期间,某市举办了趣味射击过关比赛.比赛时,有甲、乙两个靶,比赛规则如下:射手先向甲靶射击两次,再向乙靶射击一次,每命中甲靶一次得 1 分,每命中乙靶一次得 4 分,没有命中均得 0 分.现已知 A 射手向甲靶射击一次,命中的概率为 $p(0 < p < 1)$,

向乙靶射击一次,命中的概率为 $\frac{2}{3}$,假设 A 射手每次射击的结果相互独立.

(1)当 $p = \frac{1}{2}$ 时,求 A 射手命中甲靶次数多于命中乙靶次数的概率;

(2)现规定射手总得分的数学期望超过 4,比赛过关,若 A 射手过关,求实数 p 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ,点 $D(1,0)$ 为 OF_2 的中点,

O 为坐标原点, A, B 为双曲线 E 的左右顶点, P 为 E 上异于 A, B 的任一点,且满足:直线 PA 与直线 PB 的斜率之积为 $\frac{1}{3}$.

(1)求双曲线 E 的方程;

(2)过点 F_1 作斜率为 $k_1(k_1 \neq 0)$ 的直线 l 交双曲线 E 于 M, N 两点,直线 MD, ND 分别交双曲线 E 于 P, Q 两点,设直线 PQ 的斜率为 k_2 ,问是否存在实数 λ 使得: $k_1 + \lambda k_2 = 0$? 若存在,求出 λ 值;若不存在,说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin x - ax, g(x) = e^x + \cos \frac{\pi}{2}x$.

(1)若 $x \in [0, +\infty)$, $f(x) \leq 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围;

(2)判断方程: $g(x) = e^{1-2x} + \sin \pi x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上实根个数并说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线